ორწერტილოვანი ამოცანები მაღალი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის რეზონანსულ შემთხვევაში

მარიამ მანჯიკაშვილი

სადისერტაციო ნაშრომი წარდგენილია ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიზნესის, ტექნოლოგიის და განათლების ფაკულტეტზე მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მინიჭების მოთხოვნების შესაბამისად

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: სულხან მუხიგულაშვილი, პროფესორი

ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი, 2023

განაცხადი

როგორც წარდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის ავტორი, ვაცხადებ, რომ ნაშრომი წარმოადგენს ჩემს ორიგინალურ ნამუშევარს და არ შეიცავს სხვა ავტორების მიერ აქამდე გამოქვეყნებულ, გამოსაქვეყნებლად მიღებულ ან დასაცავად წარდგენილ მასალებს, რომლებიც ნაშრომში არ არის მოხსენიებული ან ციტირებული სათანადო წესების შესაბამისად.

მარიამ მანჯიკაშვილი ———————————————- 20.03.2023

მადლობა

სადისერტაციო ნაშრომის ხელმძღვანელმა ბატონმა სულხან მუხიგულაშვილმა შემომთავაზა საკვლევი თემა, დამისახა კვლევის ზოგადი გეგმა და მიმითითა საკვლევი საკითხის უფრო ღრმად გასაცნობად საჭირო ძირითადი ლიტერატურა. კვლევის პროცესში მიღებულმა რჩევებმა საშულება მომცა გადამელახა წარმოქმნილი ზოგიერთი სირთულე, რისთვისაც მინდა მის მიმართ ჩემი მადლიერება გამოვხატო.

აქვე მინდა მადლობა ვუთხრა შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნულ სამეცნიერო ფონდს, რომელმაც ჩემი სადოქტორო კვლევა დააფინანსა გრანტით PHDF-21-1248, რითიც საშუალება მომეცა კვლევით სამუშაოზე უკეთ კონცენტრირების და უცხოელ მეცნიერებთან კონტაქტის. ამასთან დაკავშირებით მინდა მადლიერების გრძნობით მოვიხსენიო ჩეხეთის რესპუბლიკის ქალაქ ბრნოს ტექნიკური უნივერსიტეტის დოცენტი ბატონი ბედრჟიხ პუჟა. აღნიშნულ უნივერსიტეტში ჩემი ორთვიანი ყოფნისას, ბატონ ბედრჟიხს სემინარებზე გავაცანი ჩატარებული კვლევის შედეგები, კვლევისას წარმოქმნილი სირთულეები და მისგან სასარგებლო შენიშვნები და რჩევები მივიღე.

აბსტრაქტი

ნაშრომი შედგება ორი თავისგან. პირველ თავში წრფივი ერთგვაროვანი $u^{(4)} = pu$ განტოლებისთვის დადგენილია სასრულ შუალედზე არარხევადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები ნიშანმუდმივი p კოეფიციენტის შემთხვევაში, ხოლო არაგაუმჯობესებადი საკმარისი პირობები კოეფიციენტის ნიშანცვლადობის შემთხვევაში. აგრეთვე დამტკიცებულია აღნიშნული ტიპის განტოლების $(k,\, 4-k)\,(k \in \{1,2,3\})$ ორწერტილოვან სასაზღვრო პირობებში გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. და ბოლოს, მიღებულია არაერთგვაროვანი $u^{(4)} = pu + h$ განტოლების აღნიშნულ ორწერტილოვან სასაზღვრო პირობებში ცალსახად ამოხსნადობის არაგაუმჯობესებადი პირობები ნიშანცვლადი p კოეფიციენტისთვის.

ნაშრომის მეორე თავში შეისწავლება მაღალი რიგის არაწრფივი განტოლებებისთვის დასმული $(k,\, n-k)\,(k \in \{1,\dots,n-1\})$ ორწერტილოვანი ამოცანების ამოხსნადობისა და ცალსახად ამოხსნადობის საკითხები რეზონანსულ შემთხვევაში. კერძოდ, დადგენილია ლანდესმან-ლაზერის ტიპის თეორემები იმ შემთხვევაში, როდესაც შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია ნიშანმუდმივი არანულოვანი ამონახსნი იმ დაშვებით, რომ განტოლების არაწრფივი ნაწილი ქვეწრფივია. როდესაც ამოცანა თვითშეუღლებულია მსგავსი შედეგები მიღებულია მაშინაც, როდესაც შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია ნიშანცვლადი არანულოვანი ამონახსნი. ხსენებული ამოცანები რეზონანსულ შემთხვევაში ცალკე განიხილება როდესაც $n = 4$. ამ შემთხვევაში კვლევა მთლიანად ეყრდნობა ნაშრომის პირველი თავის შედეგებს, რაც არაწრფივი მეოთხე რიგის ამოცანებისთვის, ზოგად შემთხვევასთან შედარებით, უფრო ძლიერი შედეგების მიღების საშუალებას იძლევა. ამ შემთხვევაში მიღებულია ამოხსნადობის ლანდესმან - ლაზერის ტიპის პირობები და ცალსახად ამოხსნადობის პირობები, რომლებშიც მოხსნილია არაწრფივ ნაწილზე ქვეწრფივობის მოთხოვნა.

საგნობრივი კლასიფიკატორები MSC 2020: 34B05, 34B15, 34B27, 34C10.

ძირითადი საძიებო სიტყვები: რეზონანსული შემთხვევა, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, სასაზღვრო ამოცანა, არარხევადობა, გრინის ფუნქცია, ამოხსნადობა.

Abstract

The thesis consists of two chapters. In the first chapter, for a linear homogeneous $u^{(4)} = pu$ equation there are established the necessary and sufficient conditions for non-oscillation on a finite interval in the case of a constant sign p coefficient, and the non-improvable sufficient conditions in the case of a nonconstant sign coefficient. The necessary and sufficient conditions for the sign-constancy of the Green's function in the $(k, 4-k)(k \in \{1,2,3\})$ two-point boundary conditions of the above-mentioned equation also have been proved. And finally, the non-improving conditions for uniquely

solvability of the nonhomogeneous $u^{(4)} = pu + h$ equation in the mentioned two-point boundary conditions are obtained for the nonconstant sign p coefficient.

In the second chapter there are studied the questions of solvability and unique solvability of $(k, n-k)(k \in \{1, \cdots, n-1\})$ two-point problems for higher order nonlinear equations in the resonance case. In particular, the Landesman-Laser type theorems are established in the case when the corresponding homogeneous problem has a constant sign non-zero solution under the assumption that the non-linear part of the equation is sub-linear. When the problem is self-adjoint, similar results are obtained even for the case where the corresponding homogeneous problem has a nonconstant sign nonzero solution. Also, the mentioned problems are considered separately in the resonance case when $n = 4$. In this case, based on the results obtained in the first chapter, for the nonlinear fourth order problems there are proved stronger results then in the general case. In particular, Landesman-laser type conditions of solvability and unique solvability theorems are obtained without requiring sub-linearity on the non-linear part of the equation.

Classification Codes MSC 2020: 34B05, 34B15, 34B27, 34C10.

Key Words: Resonance case, ordinary differential equation, boundary value problem, discojugacy, Green's function, solvability.

ძირითადი აღნიშვნები

- ჩ. დ. განტოლებები - ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები;
- $\mathbb{N}$– ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;
- $\mathbb{R}$– ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე,
$$\mathbb{R}_0^+ = [0,\, +\infty[\,, \quad \mathbb{R}^+ =]0,\, +\infty[\,, \quad \mathbb{R}_0^- =]-\infty,\, 0], \quad \mathbb{R}^- =]-\infty,\, 0[\,;$$
- $C([a,\, b];\, \mathbb{R})$– უწყვეტ $u : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ფუნქციათა ბანახის სივრცე ნორმით
$$\|u\|_C = \max\{|u(t)| : t \in [a,\, b]\};$$
- $C^n([a,\, b];\, \mathbb{R})$– n-ური რიგის წარმოებულის ჩათვლით უწყვეტ $u : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ფუნქციათა სიმრავლე;
- $\widetilde{C}^n([a,\, b];\, \mathbb{R})$–$n$-ური რიგის წარმოებულის ჩათვლით აბსოლუტურად უწყვეტ $u : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ფუნქციათა სიმრავლე, სადაც $n = 0$ შემთხვევაში ვისარგებლებთ აღნიშვნით $\widetilde{C}([a,\, b];\, \mathbb{R})$;
- $L([a,\, b];\, \mathbb{R})$– ლებეგის აზრით ინტეგრებად $p : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ფუნქციათა ბანახის სივრცე ნორმით
$$\|p\|_L = \int_a^b |p(s)|ds;$$
- $L_\infty([a,\, b];\, \mathbb{R})$– არსებითად შემოსაზღვრულ $p : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ფუნქციათა ბანახის სივრცე ნორმით
$$||p||_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,\, b]} |p(t)|;$$
- $L_{loc}(\mathbb{R}_0^+;\, \mathbb{R})$–ისეთი $p : [0,\, +\infty] \to \mathbb{R}$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც ინტეგრებადები არიან ნებისმიერ სასრულ $[0,\, b]$ შუალედზე.
- $K([a,\, b] \times \mathbb{R};\, \mathbb{R})$–ისეთი $f : [a,\, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქციების სიმრავლე რომლებიც აკმაყოფილებენ კარათეოდორის პირობებს, ანუ: $f(\,\cdot\,,\, x) : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ არის ზომადი ფუნქცია თუ $x \in \mathbb{R}$, $f(t,\, \cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ არის უწყვეტი ფუნქცია თითქმის ყველა $t \in [a,\, b]$ წერტილში, და ნებისმიერი $r > 0$ რიცხვისთვის სრულდება პირობა
$$f^*(t,\, r) := \sup\{|f(t,\, x)| : |x| \le r\} \in L([a,\, b];\, \mathbb{R}_+),$$
სადაც f^* ფუნქცია არაკლებადია მეორე არგუმენტის მიხედვით.
- აგრეთვე ნებისმიერი $x : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის ვსარგებლობთ აღნიშვნებით:
$$[x(t)]_+ = \frac{|x(t)| + x(t)}{2}, \qquad [x(t)]_- = \frac{|x(t)| - x(t)}{2}.$$
- ნებისმიერი $x, y \in L(I;\, \mathbb{R})$ ფუნქციებისათვის აღნიშვნა
$$x(t) \preccurlyeq y(t)\ (x(t) \succcurlyeq y(t)) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,$$
იმის ტოლფასია, რომ $x \le y$ $(x \ge y)$ და $x \ne y$.

სარჩევი

შესავალი

0.1 ამოცანის დასმა და ლიტერატურის მოკლე მიმოხილვა

ჩვენი ნაშრომის მიზანია შევისწავლოთ შემდეგი ტიპის მაღალი რიგის არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების

$$u^{(n)}(t) = F(t,\ u(t)) \qquad \text{თუ} \quad t \in I := [a,\, b] \tag{0.1}$$

ამოხსნადობა

$$u^{(j_1-1)}(a) = 0\,(j_1 = 1, \dots, k), \qquad u^{(j_2-1)}(b) = 0\,(j_2 = 1, \dots, n-k), \tag{0.2_k}$$

სასაზღვრო პირობებში, სადაც $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n-1.$

ხშირად არაწრფივ სასაზღვრო ამოცანებს შეისწავლიან მათი წრფივ სასაზღვრო ამოცანებთან "შედარების" გზით და ასეთ დროს მოსახერხებელია ხოლმე ამ წრფივი განტოლების შესასწავლ არაწრფივ განტოლებაში გამოკვეთა. არაწრფივი განტოლების ასეთი სახით ჩაწერა ჩვენს შემთხვევაშიც უფრო მოსახერხებელია, ამიტომ (0.1) განტოლებას გადავწერთ

$$u^{(n)}(t) = p(t)u(t) + f(t,\ u(t)) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I \tag{0.3}$$

სახით, სადაც ვიგულისხმებთ, რომ $f \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ და $p, h \in L(I; \mathbb{R})$. ისევე როგორც უფრო ზოგადი სახის სასაზღვრო ამოცანების, (0.3), (0.2_k) ამოცანის შესწავლაც, უმეტესად იმ დაშვებით ხდება, რომ შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ სასაზღვრო ამოცანას

$$w^{(n)}(t) = p(t)w(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{0.4}$$

$$w^{(j_1-1)}(a) = 0\,(j_1 = 1, \dots, k), \qquad w^{(j_2-1)}(b) = 0\,(j_2 = 1, \dots, n-k), \tag{0.5_k}$$

მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით თუ ვნახავთ მონოგრაფიას [27] და იქ მითითებულ ლიტერატურას, სადაც გადმოცემულია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანების ზოგადი თეორიის საფუძვლები და კარგად მოჩანს ამ თეორიის განვითარების ზოგადი ტენდენციები. ამასვე გვიჩვენებენ მონოგრაფიები [13] და [14]. იშვიათად ისეთ ნაშრომებსაც ვხვდებით რომლებშიც (0.3), (0.2_k) ამოაცანა იმ შემთხვევაში შეისწავლება როდესაც შესაბამის ერთგვაროვან წრფივ (0.4), (0.5_k) ამოცანას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი ანუ ე.წ. რეზონანსულ შემთხვევაში. ასეთ ნაშრომებში ძირითადად შეისწავლება მეორე რიგის განტოლებისთვის დასმული დირიხლეს ამოცანა და ისიც იმ უმარტივეს შემთხვევაში, როდესაც (0.4) განტოლების p კოეფიციენტი მუდმივი ფუნქციაა და თან მოითხოვება h ფუნქციის ერთგვაროვანი ამოცანის არანულოვან w ამონახსნთან ორთოგონალურობა ანუ პირობა $\langle h,\, w\rangle = 0$, რომელიც, როგორც შემდგომში ვნახავთ, $f \not\equiv 0$ შემთხვევაში სრულებითაც არ არის აუცილებელი. მსგავსი ნაშრომების რიცხვს მიეკუთვნება [1], [11], [23], [26], [36] და რიგი სხვა ნაშრომებისა რომლებზეც ჩვენ ქვევით უფრო დაწვრილებით გავჩერდებით. ერთი სიტყვით (0.3), (0.2_k) ამოცანა რეზონანსულ შემთხვევაში ნაკლებად არის შესწავლილი და თუ შესწავლილია ისიც მაშინ როდესაც $n = 2$, თან იმ უმარტივეს შემთხვევაში როდესაც $p \equiv Const.$ ზუსტად ეს ფაქტი იწვევს (0.3), (0.2_k) ამოცანების რეზონანსულ შემთხვევაში შესწავლის ინტერესსა და მნიშვნელოვნებას.

როდესაც რეზონანსულ შემთხვევაში სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობაზე ვსაუბ-რობთ არ შეიძლება არ ვახსენოთ ისეთი მნიშვნელოვანი ნაშრომი როგორიცაა ედუარდ ლანდესმანის და ალან ლაზერის 1970 წელს გამოსული სტატია [31], სახელწოდებით: "*Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.*"

ამ ნაშრომში განიხილება ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დი-ფერენციალური განტოლებისთვის დასმული დირიხლეს ამოცანის

$$Lu + \lambda u + g(u) = h(x), \qquad u(x) = 0 \qquad \text{თუ} \quad x \in \partial D, \tag{0.6}$$

ამოხსნადობის საკითხი თუ $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $D \subset \mathbb{R}^n$ შემოსაზღვრული ზომადი არეა, $h \in L^2(D; \mathbb{R})$, ანუ h ფუნქცია D არეზე კვადრატით ინტეგრებადია, $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ისეთია რომ არსებობენ სასრული ზღვრები $g_\pm = \lim\limits_{\rho \to \pm\infty} g(\rho)$,

$$g_- < g(\rho) < g_+ \qquad \text{თუ} \quad \rho \in \mathbb{R},$$

და

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

ელიფსური თვითშეუღლებული დიფერენციალური ოპერატორია, ანუ $a^{ij} = a^{ji}$. ნაშრომში ეს ამოცანა განიხილება იმ დაშვებით, რომ შესაბამის წრფივ ერთგვაროვან ამოცანას

$$Lw + \lambda w = 0, \qquad w(x) = 0 \qquad \text{თუ} \quad x \in \partial D,$$

გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი w და h ფუნქცია არ არის აუცილებლად ორთოგონა-ლური ამ ამონახსნის, ანუ არ არის აუცილებელი $\langle h, w \rangle = 0$ პირობის შესრულება. ასეთ დაშვებებში, ავტორებმა დაამტკიცეს, რომ (0.6) ამოცანის ამოხსნადობისთვის საკმარი-სია სრულდებოდეს პირობა

$$g_- \int_{\Omega_+} |w(x)| dx - g_+ \int_{\Omega_-} |w(x)| dx \le \langle h, w \rangle \le g_+ \int_{\Omega_+} |w(x)| dx - g_- \int_{\Omega_-} |w(x)| dx, \tag{0.7}$$

სადაც

$$\Omega_- = \{x \in D : w(x) < 0\}, \qquad \Omega_+ = \{x \in D : w(x) > 0\}.$$

მეტიც, თუ უკანასკნელი უტოლობა მკაცრია, მაშინ ის (0.6) ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ (0.7) პირობა წარმო-ადგენს ფრედჰოლმის თეორემის განზოგადებას იმ აზრით, რომ თუ $g \equiv 0$, ანუ როდესაც არაწრფივი (0.6) ამოცანა გადაგვარდება წრფივ არაერთგვაროვან ამოცანად, მაშინ (0.7) პირობა გადაიქცევა წრფივი ერთგვაროვანი ამოცანის w ამონახსნისა და h ფუნქციის ორთოგონალობის $\langle h, w \rangle = 0$ პირობად. ამდენად სახეზეა ძალიან ზუსტი თეორემა, რო-მელმაც იმთავითვე მიიპყრო ყურადღება და სწრაფად გამოჩნდა ამ ნაშრომში მიღებული შედეგების სხვადასხვა განზოგადებები. აქვე აღვნიშნოთ, რომ დღეს უკვე მიღებულია (0.7) პირობის მსგავსი შინაარსის მქონე პირობებს, ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირო-ბები ვუწოდოთ.

წინა საუკუნის 80 - იან წლებში გამოჩნდა პირველი ნაშრომები (იხ. [1], [3], [11], [15], [20], [22], [23], [26], [36]) რომლებშიც ლანდესმან-ლაზერის ტიპის ამოხსნადობის თეორემები იქნა დამტკიცებული შემდეგი სახის დირიხლეს მეორე რიგის ამოცანისთვის

$$u''(t) = \lambda^2 u(t) + f(t, u(t)) + h(t), \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0, \tag{0.8}$$

რეზონანსულ შემთხვევაში, ანუ როდესაც შესაბამის წრფივ ერთგვაროვან ამოცანას

$$w''(t) = \lambda^2 w(t), \qquad w(0) = 0, \quad w(\pi) = 0 \tag{0.9}$$

გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი. ამ ნაშრომებში განიხილებოდა მხოლოდ $\lambda = 1$ შემთხვევა, ანუ როდესაც λ არის (0.9) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი და მხოლოდ სამი [6], [16], [21] საყურადღებო ნაშრომი მოვიძიეთ იმ შემთხვევისთვის როდესაც λ არის (0.9) ამოცანის ნებისმიერი რიგის საკუთარი რიცხვი, ანუ როდესაც $\lambda \in \mathbb{N}$.

რაც შეეხება მაღალი რიგის განტოლებებისთვის ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების რეზონანსულ შემთხვევაში შესწავლას, აქ პრაქტიკულად არ მოგვეპოვება საინტერესო ნაშრომები. გამონაკლისს წარმოადგენს [47], სადაც (0.3), (0.2_k) $(n = 4,\, k = 2)$ ამოცანა განიხილება $p \equiv Const$ შემთხვევაში.

ჩამოთვლილი ნაშრომები, λ მუდმივსა და f, h ფუნქციებზე დადებული შეზღუდვების მიხედვით შეგვიძლია დავყოთ შემდეგი მახასიათებლების მიხედვით:

1. λ არის (0.9) ამოცანის პირველი თუ ნებისმიერი საკუთარი რიცხვი. თუ $\lambda > 1$ მაშინ (0.9) ამოცანის ამონახსნი ნიშანცვლადი ფუნქციაა რაც ართულებს (0.8) ამოცანის შესწავლას და როგორც უკვე ვთქვით ნაკლებად არის შესწავლილი.

2. ორი თუ ერთი ცვლადის ფუნქციაა f.

მაგალითად, ნაშრომებში [3, ს. აჰმადი], [6, მ. არიასი], განიხილება მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც

$$f(t, x) \equiv g(x) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \tag{0.10}$$

სამაგიეროდ ამ შეზღუდვის ხარჯზე h ფუნქცია აკმაყოფილებს ლანდესმან-ლაზერის (0.7) ტიპის პირობას, რომელიც არ არის გადაგვარებული პირობად

$$\int_0^\pi h(s) w(s) ds = 0.$$

3. თუ ინტეგრებადობის რა კლასს მიეკუთვნება h და f ფუნქციები პირველი ცვლადის მიმართ.

მაგალითად [3, ს. აჰმადი], [6, მ. არიასი], [22, რ. იანაჩი], [36, ჟ. მაუენი] ნაშრომებში h ფუნქციას კვადრატით ინტეგრებადობა მოეთხოვება, ისევე როგორც $f(\cdot, x)$ ფუნქციას, თუ კი (0.10) პირობა არ სრულდება.

4. მეორე არგუმენტის მიმართ როგორი ზრდაა დასაშვები $|f|$ ფუნქციისთვის, არის თუ არა მოთხოვნილი მონოტონურობა მეორე არგუმენტის მიმართ ან კენტოვნება.

5. $f(\cdot, x)$ ფუნქციაზე შეზღუდვები დადებულია როდესაც $x \in \mathbb{R}$, თუ მხოლოდ უსასრულობის მიდამოში, ანუ როდესაც $|x| > r$ სადაც $r > 0$ რამე მუდმივია. უნდა აღინიშნოს რომ ჩამოთვლილი ნაშრომების უმეტესობაში $f(\cdot, x)$ ფუნქციაზე შეზღუდვები დადებულია როდესაც $x \in \mathbb{R}$.

ამ თვისებების დაწვრილებით აღწერა შორს წაგვიყვანდა, თუმცა ყველა ამ ნაშრომს სერთო ის აქვს, რომ სხვა პირობებთან ერთად უმეტესად მოითხოვება:

$|f|$ ფუნქციის ზრდის სიჩქარე მაქსიმუმ წრფივი იყოს, მეორე არგუმენტის მიმართ f ფუნქციის კენტობა, ხშირად ამ პირობებს მონოტონურობის მოთხოვნაც ერთვის.

მაგალითად [16, პ. დრაბეკი] სტატიაში განხილულია როგორც ის შემთხვევა როდესაც მეორე არგუმენტის მიმართ $|f|$ ფუნქციის ზრდა მაქსიმუმ წრფივი შეიძლება იყოს, ისე f ფუნქციის ქვეწრფივობის შემთხვევა. ამ სტატიიდან კარგად ჩანს, რომ თუ f ფუნქცია ქვეწრფივია, მაშინ შეიძლება განვთავისუფლდეთ ზოგიერთი სხვა შეზღუდვისგან.

2011 წელს ნაშრომში [43, ს. მუხიგულაშვილი] შემუშავებულ იქნა მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ რეზონანსულ შემთხვევაში (0.3), $(0.2_k)\,(n=2)$ ამოცანის ამოხსნადობის ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირობები მაშინაც, როდესაც ფუნქცია p არ არის აუცილებლად მუდმივი. ამ სტატიაში განიხილება ორი შემთხვევა. ერთი როდესაც

$$w''(t)=p(t)w(t), \quad w(a)=0, \quad w(b)=0,$$

ამოცანის არანულოვან w ამონახსნს არ გააჩნია $]a,\, b[$ ინტერვალში ნულები (ნიშანმუდმივია) რაც (0.9) ამოცანის შემთხვევაში შეესაბამება $\lambda=1$ შემთხევას და მეორე შემთხვევა როდესაც w ამონახსნს $]a,\, b[$ ინტერვალში ზუსტად $n-1$ ცალი მარტივი ნული გააჩნია (ნიშანცვლადია) რაც (0.9) ამოცანისთვის შეესაბამება $\lambda=n$ შემთხვევას.

პირველ შემთხვევაში მოხერხდა ამოხსნადობის ლანდესმან - ლაზერის ტიპის თეორემის დამტკიცება, ზევით მოყვანილი სტატიების კონტექსტში, f ფუნქციაზე მინიმალური შეზღუდვების პირობებში. კერძოდ, დამტკიცებულ იქნა შემდეგი თეორემა:

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.1.** დავუშვათ მოიძებნება ისეთი $f^-, f^+ \in L(I;\mathbb{R}^+),\; g, h_0 \in L(I;\mathbb{R}^+)$ ფუნქციები და $r>0$, $\varepsilon>0$ მუდმივები, რომ I შუალედზე სრულდება პირობები

$$f(t,x)\mathrm{sgn}x \le g(t)|x| + h_0(t) \qquad \text{თუ} \quad |x|\ge r, \tag{0.11}$$

და

$$\begin{aligned} f(t,x) &\le -f^-(t) &\quad \text{თუ} \quad x\le -r,\\ f^+(t) &\le f(t,x) &\quad \text{თუ} \quad x\ge r. \end{aligned} \tag{0.12}$$

მეტიც, დავუშვათ (0.4), (0.5_k) ამოცანის რაიმე არანულოვანი w ამონახსნისთვის სამართლიანია ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირობა

$$\begin{aligned} &-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds + \varepsilon||\gamma_r||_L||w||_C \le \\ &\qquad -\int_a^b h(s)|w(s)|ds \le \\ &\int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - \varepsilon||\gamma_r||_L||w||_C, \end{aligned} \tag{0.13}$$

სადაც $\gamma_r=\int_a^b f^*(s,\, r)ds$. მაშინ (0.3), (0.2_k) $(n=2,\; k=1)$ ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი.

როგორც ამას (0.11) და (0.12) პირობებიდან ვხედავთ აქ $|f|$ ფუნქცია უსასრულობის მიდამოში შემოსაზღვრულია წრფივი ფუნქციით და მას იგივე ნიშანი აქვს რაც თვით მეორე ცვლადს, და ასეთ შეზღუდვებში ლანდესმან - ლაზერის ტიპის (0.13) პირობა უზრუნველყოფს ჩვენი ამოცანის ამოხსნადობას. თუმცა იმ შემთხვევაში, როდესაც w ამონახსნი ნიშანცვლადია f ფუნქციას უკვე ქვეწრფივობა მოეთხოვება, კერძოდ (0.11) პირობა ჩანაცვლდება

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{\rho}\int_a^b f^*(s,\,\rho)ds = 0$$

პირობით.

აქვე უნდა აღინიშნოს რომ ყველა იმ ნაშრომში რომელზეც ჩვენ ვისაუბრეთ, მნიშვნელოვანი იყო შესასწავლი ამოცანის თვითშეუღლებულობა. თუმცა 2016, 2017 წლებში გამოსულმა სტატიებმა [44,45, ს. მუხიგულაშვილი], რომლებშიც რეზონანსულ შემთხვევაში განიხილებოდა (0.3)$(n = 2)$ განტოლება ამჯერად უკვე შერეულ სასაზღვრო პირობებში, აჩვენა რომ [43] სტატიაში შემუშავებული მეთოდი არათვითშეუღლებული ამოცანებისთვისაც შეიძლება იქნას გამოყენებული. მეტიც, გამოჩნდა რომ ეს მეთოდი მაღალი რიგის ამოცანებისთვისაც გამოდგებოდა. და მართლაც, 2020 წელს გამოვიდა ნაშრომი [39, მ. მანჯიკაშვილი, ს. მუხიგულაშვილი], რომელშიც მეოთხე რიგის განტოლებისთვის დასმული დირიხლეს ამოცანისთვის რეზონანსულ შემთხვევაში დამტკიცებულ იქნა ამოხსნადობის ლანდესმან - ლაზერის ტიპის პირობები. თუმცა, მიუხედავად იმისა, ნიშანცვლადია თუ არა შესაბამისი ერთგვაროვანი (0.4), (0.5_k) ამოცანის არანულოვანი w ამონახსნი, f ფუნქციის ქვეწრფივობის პირობისგან განთავისუფლება ამ ნაშრომში ვერ მოხერხდა.

[39] სტატიაზე მუშაობის პროცესმა დაგვარწმუნა, რომ სერიოზული დახვეწის შემდეგ კვლევის ჩვენი მეთოდი, (0.3), (0.2_k) ამოცანისთვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას ნებისმიერი რიგის განტოლებისთვის, ნებისმიერ (0.2_k) პირობებში და რომ მეთოდი არ არის მიბმული მხოლოდ თვითშეუღლებულ ამოცანებზე, რამაც საფუძველი დაუდო ჩვენი სადისერტაციო კვლევის თემას. თუმცა, აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ არათვითშეუღლებული ამოცანებისთვის ჩვენი მეთოდი აღარ იძლევა იმ უზოგადესი შემთხვევის განხილვის საშუალებას, როდესაც საკვლევი ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი (0.4), (0.5_k) ამოცანის არანულოვანი w ამონახსნი ნიშანცვლადი ფუნქციაა.

0.2 კვლევის მეთოდის აღწერა

იმისთვის რომ სადოქტორო ნაშრომის სტრუქტურა უფრო გასაგები და დასაბუთებული იყოს, აქვე სქემატურად აღვწერთ კვლევის ჩვენს მეთოდს მეორე რიგის განტოლების მაგალითზე. ამისათვის განვიხილოთ ამოცანების მიმდევრობა

$$\begin{gathered} u_n''(t) = \Big(p(t) + \frac{1}{n}\Big)u_n(t) + f(t, u_n(t)) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\, n \in \mathbb{N}, \\ u_n(a) = 0, \quad u_n(b) = 0. \end{gathered} \tag{0.14}$$

რადგან

$$w''(t) = p(t)w(t), \qquad w_n(a) = 0, \quad w_n(b) = 0 \tag{0.15}$$

ამოცანას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი, მაშინ როგორც ცნობილია შეშფოთებულ

$$v_n''(t) = (p(t) + 1/n)v(t), \qquad v_n(a) = 0, \quad v_n(b) = 0 \tag{0.16}$$

ამოცანას საკმარისად დიდი n_0 რიცხვიდან დაწყებული გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი და ამგვარად (0.14) ამოცანა აღარაა რეზონანსული თუ $n > n_0$ (ამიტომ (0.14) ამოცანას მოვიხსენიებთ ხოლმე როგორც რეზონანსიდან გამოყვანილ ამოცანას). ასეთ შემთხვევაში თუ გვაქვს არარეზონანსული ამოცანის ამოხსნადობის ეფექტური საკმარისი პირობები, მაშინ ამ პირობების მოთხოვნით მივაღწევთ (0.14) ამოცანების ამოხსნადობას და გაგვიჩნდება ამ ამოცანების ამონახსნთა $\{u_n\}_{n>n_0}^{+\infty}$ მიმდევრობა.

მეორე რიგის განტოლებებისათვის განსაკუთრებით კარგადაა შესწავლილი ორწერტილოვანი ამოცანების ამოხსნადობის საკითხი და დაწვრილებითაა შესწავლილი კავშირი (0.16) განტოლების ოსცილაციურ თვისებებსა და (0.15) ამოცანის ამოხსნადობას შორის. მაგალითად, ცნობილია რომ თუ (0.16) განტოლება არარხევადია I შუალედზე, მაშინ იმისთვის რომ (0.14) ამოცანას გააჩნდეს ამონახსნი საკმარისია სრულდებოდეს ე.წ. ცალმხრივი შემოსაზღვრულობის პირობა

$$f(t,\,x)\,\mathrm{sgn}\,x \geq -\delta(t,\,x) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\; x \in \mathbb{R}, \tag{0.17}$$

სადაც δ ფუნქცია ქვეწრფივია მეორე არგუმენტის მიმართ. ხოლო თუ (0.16) განტოლება რხევადია I შუალედზე, მაშინ (0.14) ამოცანის ამოხსნადობისთვის (0.17) პირობა აღარ არის საკმარისი და უნდა დავუშვათ რომ f ფუნქცია ქვეწრფივია. ამიტომ, თუ (0.15) განტოლების არანულოვანი w ამონახსნი ნიშანმუდმივია, მაშინ შტურმის შედარების თეორემის ძალით (0.16) განტოლება იქნება არარხევადი და შევძლებთ განვთავისუფლდეთ f ფუნქციის ქვეწრფივობის შეზღუდვსიგან, რაც შეუძლებელია w ფუნქციის ნიშანცვლადობის შემთხვევაში. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ ამონახსნთა $\{u_n\}_{n>n_0}^{+\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია, მოიძებნება წარმოებულთან ერთად აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია u ისეთი, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} u_n^{(i)}(t) = u^{(i)}(t)\ (i=0,1) \qquad \text{თანაბრად} \quad I \quad \text{შუალედზე},$$

და $\lim_{x\to+\infty}(p(t)+1/n) = p(t)$ პირობის გათვალისწინებით (0.14) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ u არის (0.3), $(0.2_k)\,(n=2)$ რეზონანსული ამოცანის ამონახსნი. ანუ რეზონანსიდან გამოყვანილი ამოცანის ამოხსნადობისათვის (0.17) პირობის დადების შემდეგ, საკითხი მიიყვანება $\{u_n\}_{n>n_0}^{+\infty}$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობის ჩვენებაზე. ამისთვის კი საჭირო ხდება განტოლების მარჯვენა ნაწილში შემავალ p, f და h ფუნქციებზე (0.17) პირობასთან ერთად ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირობების და შესაძლოა კიდევ სხვა დამატებითი პირობების დადებაც.

როგორც კვლევამ აჩვენა, მაღალი რიგის განტოლებებისთვისაც სიტუაცია ანალოგიურია. კერძოდ კი რეზონანსულ შემთხვევაში (0.3), (0.2_k) ამოცანის ამოხსნადობისა და ცალსახად ამოხსნადობის საკამარისი პირობების მისაღებად, ჩვენ გვჭირდება:

1. რეზონანსიდან გამოყვანილი ამოცანის ამოხსნადობის და ცალსახად ამოხსნადობის საკმარისი პირობების ქონა და რაც უფრო ზოგად პირობებში დავადგენთ არარეზონანსული ამოცანის ამოხსნადობასა და ცალსახად ამოხსნადობას მით უფრო ზოგადი პირობები გადავა "შთამომავლობით" რეზონანსულ შემთხვევაში. ხოლო არარეზონანსულ შემთხვევაში ამოხსნადობის მაქსიმალურად ზოგადი პირობების მისაღებად მნიშვნელოვანია (0.4), (0.5_k) წრფივი ამოცანის გრნის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის და (0.4) წრფივი განტოლების არარხევადობის ოპტიმალური პირობების ქონა;

2. თუ გვინდა განვთავისუფლდეთ f ფუნქციის ქვეწრფივობის მოთხოვნისგან w ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შემთხვევაში მაინც, (0.4) ტიპის წრფივი განტოლებებისთვის შტურმის შედარების თეორემის მსგავსი თეორემა უნდა გაგვაჩნდეს.

შემდეგ ქვეთავში მოკლედ აღვწერთ სადოქტორო ნაშრომის უმნიშვნელოვანეს შედეგებს, რომლებიც უკვე გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [38] - [42].

0.3 **ძირითადი შედეგების მიმოხილვა**

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, რეზონანსული ამოცანების ამოხსნადობის შესწავლისას ამოხსნადობის პირობები შეიძლება საგრძნობლად გავაუმჯობესოთ თუ გვექნება არაწრფივი განტოლების შესაბამისი წრფივი განტოლების არარხევადობის შედარების ტიპის პირობები და ამ განტოლებისთვის დასმული შესაბამისი ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობის ოპტიმალური საკმარისი პირობები. ზოგადად n-ური რიგის წრფივი განტოლებებისთვის ჩვენთვის საჭირო ტიპის პირობების მიღება ძალიან გართულდა, თუმცა $n = 4$ შემთხვევაში ყველა ჩვენთვის საინტერესო კითხვაზე ამომწურავი პასუხი მივიღეთ. ამან საშუალება მოგვცა მეოთხე რიგის არაწრფივი ამოცანებისთვის რეზონანსულ შემთხვევაში განვთავისუფლებულიყავით განტოლების არაწრფივი ნაწილის მკაცრად ქვეწრფივობის პირობისგან და დაგვემტკიცებინა არა მარტო ამონახსნის არსებობის, არამედ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემებიც.

მეოთხე რიგის წრფივი განტოლებებისთვის ჩვენთვის საჭირო თვისებების დამტკიცება არატრივიალური ამოცანა აღმოჩნდა და საკმარისად ღრმა კვლევის ჩატარება მოგვიხდა. წრფივი ამოცანებისთვის ჩვენ მიერ მიღებული შედეგები, გარდა იმისა რომ პირდაპირ საჭიროებას წარმოადგენდა არაწრფივი ამოცანების კვლევისას, ზოგადი თეორიის თვალსაზრისითაც უდავოდ საინტერესო და ფასეული აღმოჩნდა. ზუსტად ეს გახდა იმის მიზეზი, რომ ეს შედეგები მოგვყავს არა როგორც დამხმარე დებულებები, არამედ სადოქტორო ნაშრომის მთელი პირველი თავი დავუთმეთ მათ, როგორც, ამავე დროს, დამოუკიდებელი მნიშვნელობის მქონე შედეგებს. აგრეთვე მეოთხე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებების კვლევისას მივიღეთ საინტერესო შედეგები არანულოვანი ამონახსნის სასრულ შუალედზე ნულების რაოდენობის შესახებ რაც აისახა [37] ნაშრომში. თუმცა ეს შედეგები არ შეგვიტანია სადოქტორო ნაშრომში რადგან მათ პირდაპირი კავშირი არაწრფივი ამოცანების ჩვენს კვლევასთან არ აქვთ. ნაშრომის მეორე თავი მთლიანად არაწრფივ ამოცანებს ეთმობა.

0.3.1 *წრფივი ამოცანები*

სადოქტორო ნაშრომის პირველ თავში წარმოდგენილი შედეგები გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [40] - [42]. ამ შედეგებში მეოთხე რიგის ერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისთვის

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t), \tag{0.18}$$

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) - \mu u(t), \tag{0.19}$$

სადაც $p \in L(I; \mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{R}$, ჩვენ შევისწავლით ერთმანეთთან მჭიდროდ დაკავშირებულ სამ საკითხს. პირველი საკითხია ამ განტოლებების არარხევადობა სასრულ $I := [a, b] \subset [0, +\infty[$ შუალედზე, რაც მოითხოვს ამ განტოლებების შემდეგ სასაზღვრო პირობებში განხილვას

$$u(a) = 0\ , \qquad u^{(j)}(b) = 0\ (j = 0, 1, 2), \tag{0.20_1}$$

$$u^{(j)}(a) = 0, \qquad u^{(j)}(b) = 0\ (j = 0, 1), \tag{0.20_2}$$

$$u^{(j)}(a) = 0\ (j = 0, 1, 2), \qquad u(b) = 0. \tag{0.20_3}$$

მეორე საკითხია არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლების

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + q(t) \tag{0.21}$$

სადაც $q \in L(I;\mathbb{R})$, $(0.20_k)\,(k=1,2,3)$ სასაზღვრო პირობებში ცალსახად ამოხსნადობა, ხოლო მესამე საკითხია (0.19), $(0.20_k)\,(k=1,2,3)$ ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობა.

ჩვენი შედეგების ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება შემდეგი განსაზღვრებების შემოღება:

***განსაზღვრება* 0.1.** ვიტყვით, რომ (0.18) განტოლება არარხევადია I შუალედზე, თუ ყოველ მის u არანულოვან ამონახსნს I შუალედზე გააჩნია არაუმეტეს სამი ნულისა, ნულების ჯერადობის ჩათვლით. საწინააღმდეგო შემთხვევაში ვიტყვით, რომ (0.18) განტოლება რხევადია I შუალედზე.

***განსაზღვრება* 0.2.** ვიტყვით, რომ $p \in D_+(I)$ თუ $p \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$, და (0.18), (0.20_2) ამოცანას გააჩნია ისეთი u ამონახსნი, რომ

$$u(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,b[\,. \tag{0.22}$$

***განსაზღვრება* 0.3.** ვიტყვით, რომ $p \in D_-(I)$ თუ $p \in L(I;\mathbb{R}_0^-)$, და (0.18), (0.20_3) ამოცანას გააჩნია ისეთი u ამონახსნი, რომლისთვისაც სრულდება (0.22) უტოლობა.

პირველი თავის ძირითად შედეგებს მიეკუთვნება (0.18) განტოლების I შუალედზე არარხევადობის სამი თეორემა. ამ თეორემებში მოყვანილია (0.18) განტოლების I შუალედზე არარხევადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმ შემთხვევაში, როდესაც p კოეფიციენტი ნიშანმუდმივი ფუნქციაა და არარხევადობის არაგაუმჯობესებადი საკმარისი პირობა იმ შემთხვევისთვის, როდესაც p კოეფიციენტის ნიშანზე არავითარი შეზღუდვა არ გვაქვს. ეს თეორემები ჩამოყალიბებულია $D_-(I)$ და $D_+(I)$ კლასების ენაზე და თავისი ბუნებით შედარების თეორემებია.

***თეორემა* 0.2.** დავუშვათ $p \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$. მაშინ (0.18) განტოლება არარხევადია I მონაკვეთზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მოიძებნება $p^* \in D_+(I)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$p(t) \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

***თეორემა* 0.3.** დავუშვათ $p \in L(I;\mathbb{R}_0^-)$. მაშინ (0.18) განტოლება არარხევადია I მონაკვეთზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მოიძებნება $p_* \in D_-(I)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$p(t) \succcurlyeq p_*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

***თეორემა* 0.4.** დავუშვათ $p_* \in D_-(I)$, $p^* \in D_+(I)$, და $p \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს

$$p_*(t) \preccurlyeq -[p(t)]_-, \qquad [p(t)]_+ \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

მაშინ (0.18) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

ამ თეორემებზე დაყრდნობით დამტკიცებულია (0.18) და (0.19) განტოლებების I შუალედზე არარხევადობის ეფექტური საკმარისი პირობების შემცველი სხვა თეორემებიც. დამტკიცებული თეორემებიდან გამოყვანილია საინტერესო ეფექტური შედეგები რომლებსაც აქ არ გავაშუქებთ (იხ. ქვეპარაგრაფი 1.1.1, გვ. 15 და 1.1.2, გვ. 19).

რაც შეეხება (0.21), $(0.20_k)\,(k = 1,2,3)$ ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობას (იხ. ქვეპარაგრაფი 1.1.3, გვ. 21), მიღებულია ორი ძალიან მნიშვნელოვანი თეორემა, რომლებიდანაც გამომდინარეობს, რომ (0.21), $(0.20_k)\,(k = 1,2,3)$ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობისთვის თუ $k = 2$ მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ იმას თუ როგორია p ფუნქციის დადებითი ნაწილი $[p]_+$, და არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს მის უარყოფით ნაწილს, ისევე როგორც $k = 1$ და $k = 3$ შემთხვევებში მნიშვნელოვანია მხოლოდ p ფუნქციის უარყოფითი ნაწილი $[p]_-$, და არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს მის დადებით ნაწილს. მოვიყვანოთ ეს თეორემები.

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.5.** ვთქვათ $p_0 \in L(I;\mathbb{R})$ ისეთია რომ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = [p_0(t)]_+ u(t)$$

არარხევადია I შუალედზე. მაშინ უტოლობა

$$p(t) \le p_0(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I$$

უზრუნველყოფს (0.21), (0.20_2) ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობას.

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.6.** ვთქვათ $p_0 \in L(I;\mathbb{R})$ ისეთია რომ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = -[p_0(t)]_- u(t)$$

არარხევადია I შუალედზე. მაშინ უტოლობა

$$p(t) \ge p_0(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I$$

უზრუნველყოფს (0.21), (0.20_1) და (0.21), (0.20_3) ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობას.

ამ თეორემებიდან გამომდინარეობს რიგი ეფექტური შედეგებისა რომლებსაც აქ არ მოვიყვანთ (იხ. შედეგები 1.12-1.15, გვ. 21).

აგრეთვე ჩვენ მიერ მიღებულ არარხევადობის შედეგებზე დაყრდნობით, დამტკიცებულია (0.19), $(0.20_k)\,(k = 1,2,3)$ ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომლებიც ჩამოყალიბებულია (0.19), (0.20_k) ამოცანების საკუთარი რიცხვების ენაზე.

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.7.** დავუშვათ $p \in D_+(I) \cap C(I;\mathbb{R})$. მაშინ:

ა. (0.19), (0.20_2) ამოცანის გრინის ფუნქცია არაუარყოფითია $I \times I$ სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in]0,\, \mu_p],$$

სადაც $\mu_p := \min\{\mu_1^*,\, \mu_3^*\}$, და μ_k^* $(k = 1,3)$ არის (0.19), (0.20_k) ამოცანის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი;

ბ. სამართლიანია შეფასება

$$\mu_p > \Big(\frac{5.56}{b-a}\Big)^4.$$

თ ე ო რ ე მ ა 0.8. დავუშვათ $p \in D_{-}(I) \cap C(I;\mathbb{R})$. მაშინ:

ა. (0.19), (0.20$_2$) ამოცანის გრინის ფუნქცია არაუარყოფითია $I \times I$ სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in]\mu_p,\, 0],$$

სადაც μ_p არის (0.19), (0.20$_1$) ამოცანის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი;

ბ. სამართლიანია შეფასება

$$\mu_p < -\Big(\frac{4.73}{b-a}\Big)^4.$$

ანალოგიური თეორემები დამტკიცებულია (0.19), (0.20$_1$) ამოცანისთვის p კოეფიციენტის არაუარყოფითობისა და არადადებითობის შემთხვევებში (იხ. თეორემები 1.12, 1.13, გვ. 23).

0.3.2 *არაწრფივი ამოცანები*

სადოქტორო ნაშრომის მეორე თავში წარმოდგენილი შედეგები ნაწილობრივ უკვე გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [38], [39], [42].

მეორე თავი იწყება (0.3), (0.2_k) ამოცანის განხილვით ნებისმიერი $n \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n-1$ რიცხვებისთვის. ანუ განხილვის არეში ხვდებიან ისეთი ამოცანებიც რომლებიც არ არიან თვითშეუღლებულები. როგორც ერთხელ უკვე აღვნიშნეთ, ასეთ შემთხვევაში ჩვენი მეთოდი აღარ იძლევა იმ უზოგადესი შემთხვევის განხილვის საშუალებას, როდესაც საკვლევი ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი (0.4), (0.5_k) ამოცანის არანულოვანი w ამონახსნი ნიშანცვლადი ფუნქციაა. ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$N_{p,n} \overset{def}{\equiv} \{t \in]a,\, b[\, :\ w(t) = 0,\ w \not\equiv 0\},$$

სადაც w არის (0.4), (0.5_k) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი და შევნიშნოთ, რომ რადგან (0.4), (0.5_k) ამოცანის არანულოვან ამონახსნთა სივრცე ერთგანზომილებიანია, $N_{p,n}$ სიმრავლე არ იქნება დამოკიდებული არანულოვანი w ამონახსნის შერჩევაზე. აქვე უნდა ითქვას, რომ არაწრფივ ამოცანებს შევისწავლით დაშვებით რომ p კოეფიციენტი ნიშანმუდმივი ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

$$(-1)^{n-k} p(t) \succcurlyeq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{0.23}$$

რადგან საწინააღმდეგო შემთხვევაში (0.4), (0.5_k) ამოცანას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს და (0.3), (0.2_k) ამოცანა უბრალოდ ვერ იქნება რეზონანსული.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n-1$ რიცხვების შემთხვევაში დამტკიცებული თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 0.9. დავუშვათ $i \in \{0,1\}$, $r > 0$, $N_{p,n} = \emptyset$, და ფუნქციები $f^+, f^- \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$ ისეთია, რომ სრულდება პირობები (0.23),

$$\begin{aligned} (-1)^i f(t,x) &\leq -f^-(t) \qquad \text{თუ} \quad x \leq -r, \quad t \in I, \\ f^+(t) &\leq (-1)^i f(t,x) \qquad \text{თუ} \quad x \geq r, \quad t \in I, \end{aligned} \tag{0.24$_i$}$$

და

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b f^*(s,\rho)ds = 0. \tag{0.25}$$

მეტიც, დავუშვათ w არის (0.4), (0.5_k) ამოცანის შეუღლებული ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი და მოიძებნება $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ სრულდება ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირობა

$$-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds + \varepsilon\gamma_r||w||_C \leq (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)|w(s)|ds \leq$$

$$\int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C,$$

სადაც $\gamma_r = \int_a^b f^*(s,\, r)ds$. მაშინ (0.3), (0.2_k) ამოცანა ამოხსნადია.

მეორე თავის პირველ ქვეთავში აგრეთვე მოყვანილია ამ თეორემის ერთი შედეგი და ამოხსნადი რეზონანსული ამოცანების მაგალითები.

მეორე თავის მეორე ქვეთავში ჩვენ განვიხილავთ მაღალი რიგის თვითშეუღლებულ ამოცანებს, ანუ განვიხილავთ (0.3), (0.2_k) ამოცანას როდესაც $n = 2m \, (m \in \mathbb{N})$ და $k = m$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (0.3), (0.2_k) დირიხლეს ამოცანაა.

ასეთ შემთხვევაში ჩვენი მეთოდი იმ ზოგად შემთხვევასაც სწვდება, როდესაც საკვლევი ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი (0.4), (0.5_k) ამოცანის არანულოვანი w ამონახსნი ნიშანცვლადი ფუნქციაა, ანუ როდესაც $N_{p,2m} \neq \emptyset$. იმ ფაქტს, რომ w ფუნქციას გააჩნია ნულები, შემოაქვს f ფუნქციაზე დამატებითი შეზღუდვა $f \in E(N_{p,2m})$, რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია უნდა ეკუთვნოდეს ისეთი ფუნქციების კლასს, რომლებსაც $N_{p,2m}$ სიმრავლეზე არ გააჩნიათ გარკვეული "ეგზოტიკური" თვისებები, ამიტომ $f \in E(N_{p,n})$ ჩართვა არ წარმოადგენს რეალურად ძლიერ შეზღუდვას. მაგალითად, თუ f განცალებად ცვლადებიანი ფუნქციაა ანუ $f(t,x) \equiv f_0(t)g(x)$, მაშინ $f \in E(N_{p,2m})$ ჩართვა ავტომატურად სრულდება (უფრო დაწვრილებით $E(N_{p,n})$ სიმრავლის შესახებ იხილეთ განსაზღვრება გვ. 46).

კერძოდ კი $n = 2m, \; k = m,$ შემთხვევისთვის დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.10.** დავუშვათ $i \in \{0, 1\}$, $r > 0$, და ფუნქციები $f^+, f^- \in L(I; \mathbb{R}_0^+)$ ისეთია, რომ სრულდება (0.24_i), (0.25) პირობები, სადაც

$$N_{p,2m} \neq \emptyset \qquad \text{და} \qquad f \in E(N_{p,2m}).$$

მეტიც, დავუშვათ w არის (0.4), (0.5_k) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი და მოიძებნება $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ სრულდება ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირობა

$$-\int_a^b (f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+)ds + \varepsilon\gamma_r||w||_C \leq$$

$$\leq (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds \leq$$

$$\leq \int_a^b (f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+)ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C,$$

სადაც $\gamma_r = \int_a^b f^*(s,\, r)ds$. მაშინ (0.3), (0.2_k) ამოცანა ამოხსნადია.

მეორე თავის მეორე ქვეთავში ამ თეორემასთან ერთად მოყვანილია ამ თეორემის ოთხი არატრივიალური შედეგი რომლებზეც აქ არ შევჩერდებით.

როგორც ვხედავთ, ორ უკანასკნელ თეორემაში f ფუნქცია ქვეწრფივია რასაც (0.25) პირობა გვიჩვენებს. ქვეწრფივობის მოთხოვნა სავსებით ბუნებრივად მიგვაჩნია იმ შემთხვევაში, როდესაც $N_{p,n} \neq \emptyset$, რასაც ვერ ვიტყვით $N_{p,n} = \emptyset$ შემთხვევაზე. მიუხედავად იმისა, რომ 0.9 თეორემაში განიხილება $N_{p,n} = \emptyset$ შემთხვევა, f ფუნქციაზე ქვეწრფივობის მოთხოვნისგან ვერ ვთავისუფლდებით, რადგან ზოგად შემთხვევაში (0.4) განტოლების არარხევადობის ჩვენთვის საჭირო ტიპის თეორემები არ გვაქვს. ზოგადი შემთხვევისგან განსხვავებით, მეოთხე რიგის შემთხვევაში (0.4) განტოლების არარხევადობის ჩვენთვის საჭირო შედეგები ჩვენ დავადგინეთ პირველ თავში, რაც გვაძლევს საშუალებას განვთავისუფლდეთ f ფუნქციის ქვეწრფივობის მოთხოვნისგან. ამისთვის მეორე თავის მესამე ქვეთავში ჩვენ პირველ რიგში შევისწავლით (0.3), $(0.2_k)\,(n=4)$ ამოცანებს არარეზონანსულ შემთხვევაში და ვამტკიცებთ ამოხსნადობისა და ერთადერთობის თეორემებს (იხ. თეორემები 2.3 - 2.5, გვ. 50 - 51), რომლებსაც აქ არ მოვიყვანთ, მაგრამ ვიტყვით მთავარს, რომ ამ თეორემებში f ფუნქციას არ მოეთხოვება ქვეწრფივობა. ამან საშუალება მოგვცა $N_{p,n} = \emptyset$ შემთხვევაში, (0.3), $(0.2_k)\,(n=4)$ რეზონანსული ამოცანების ამოხსნადობის თეორემაშიც განვთავისუფლებულიყავით f ფუნქციის ქვეწრფივობის მოთხოვნისაგან. კერძოდ კი სამართლიანი აღმოჩნდა ამონახსნის არსებობის შემდეგი თეორემა:

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.11.** დავუშვათ

$$p \in D_+(I) \quad \text{თუ} \quad k=2, \qquad p \in D_-(I) \quad \text{თუ} \quad k=1 \ \text{ან} \ k=3, \tag{0.26}$$

$$(-1)^{4-k}p(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{0.27}$$

და მოიძებნება ისეთი $r > 0$ მუდმივი და $f^-,\ f^+,\ g \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$ ფუნქციები რომ სრულდება პირობები

$$f^-(t) \leq (-1)^k f(t,x) \leq g(t)|x| \qquad \text{თუ} \quad x < -r,\ t \in I,$$
$$-g(t)|x| \leq (-1)^k f(t,x) \leq -f^+(t) \qquad \text{თუ} \quad x > r,\ t \in I.$$

მეტიც, დავუშვათ w არის (0.4), (0.5_k) ამოცანის შეუღლებული ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი და მოიძებნება $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ სრულდება ლანდესმან-ლაზერის ტიპის პირობა

$$-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds + \varepsilon\gamma_r||w||_C \leq (-1)^k \int_a^b h(s)|w(s)|ds \leq$$
$$\int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C,$$

სადაც $\gamma_r = \int_a^b f^*(s,\,r)ds$. მაშინ (0.3), $(0.2_k)\,(n=4)$ ამოცანა ამოხსნადია.

ნაშრომის პირველ თავში მეოთხე რიგის წრფივი განტოლებებისთვის დადგენილმა არარხევადობის და შესაბამისი წრფივი ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობის შედეგება საშუალება მოგვცა რეზონანსულ შემთხვევაში ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგი თეორემა დაგვემტიკებია ($n > 4$ შემთხვევში წრფივი ამოცანებისთვის მსგავსი შედეგების უქონლობის გამო არ ხერხდება (0.3), (0.2_k) ამოცანისთვის რეზონანსულ შემთხვევაში ამონახსნის ერთადერთობის თეორემების დადგენა):

***თ ე ო რ ე მ ა* 0.12.** დავუშვათ დაცულია (0.26), (0.27) პირობები და $f(t,0)\equiv 0$. მეტიც დავუშვათ მოიძებნება ისეთი უწყვეტი ფუნქციები $\eta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, და $g,\ell\in L(I;\mathbb{R}_0^+)$, რომ $\ell\not\equiv 0$ და სრულდება პირობა

$$-g(t)|x_1-x_2|\le(-1)^k[f(t,x_1)-f(t,x_2)]\operatorname{sgn}(x_1-x_2)\le$$

$$-\ell(t)\eta(x_1,x_2)|x_1-x_2| \qquad \text{თუ} \quad t\in I,\ x_1,x_2\in\mathbb{R},$$

სადაც

$$\lim_{|\rho|\to+\infty}|\rho|\eta(\rho,0)=+\infty.$$

მაშინ ნებისმიერი $h\in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციისთვის (0.3), $(0.2_k)\,(n=4)$ ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია.

თ ა ვ ი I. IV რიგის წრფივი ჩ.დ. განტოლებები

1.1 ძირითადი შედეგები

პირველ თავში მეოთხე რიგის ერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისთვის

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t), \tag{1.1}$$

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) - \mu u(t), \tag{1.2}$$

სადაც $p \in L(I; \mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{R}$, ჩვენ შევისწავლით ერთმანეთთან მჭიდროდ დაკავშირებულ სამ საკითხს. პირველია ამ განტოლებების არარხევადობა სასრულ $I := [a, b] \subset [0, +\infty[$ შუალედზე, რაც მოითხოვს ამ განტოლებების შემდეგ სასაზღვრო პირობებში განხილვას

$$u(a) = 0, \qquad u^{(j)}(b) = 0 \ (j = 0, 1, 2), \tag{1.3$_1$}$$

$$u^{(j)}(a) = 0, \qquad u^{(j)}(b) = 0 \ (j = 0, 1), \tag{1.3$_2$}$$

და

$$u^{(j)}(a) = 0 \ (j = 0, 1, 2), \qquad u(b) = 0. \tag{1.3$_3$}$$

შემდეგ შევისწავლით არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლების

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + q(t) \tag{1.4}$$

სადაც $q \in L(I; \mathbb{R})$, (1.3_k) $(k = 1, 2, 3)$ სასაზღვრო პირობებში ცალსახად ამოხსნადობის და (1.2), (1.3_k) $(k = 1, 2, 3)$ ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის საკითხებს.

საყურადღებოა, რომ მიღებულია (1.1) განტოლების არარხევადობის არაგაუმჯობესებადი პირობები როგორც p კოეფიციენტის ნიშანმუდმივობის, ისე განსაკუთრებით რთულ, p კოეფიციენტის ნიშნცვლადობის შემთხვევაშიც, რამაც საშუალება მოგვცა (1.4), (1.3_k) $(k = 1, 2, 3)$ ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი $p \in L(I; \mathbb{R})$ კოეფიციენტის შემთხვევაში შეგვესწავლა.

რაც შეეხება (1.2), (1.3_k) $(k = 1, 2, 3)$ ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის საკითხს. აქ მიღებულია გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები რომლებიც ჩამოყალიბებულია

$$Lu = u^{(4)} - pu$$

დიფერენციალური ოპერატორის საკუთარი რიცხვების ენაზე.

ჩვენი შედეგების ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება შემდეგი განსაზღვრებების შემოღება:

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1. ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე, თუ ყოველ მის არანულოვან u ამონახსნს I შუალედზე გააჩნია არაუმეტეს სამი ნულისა, ნულების ჯერადობის ჩათვლით. საწინააღმდეგო შემთხვევაში ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლება რხევადია I შუალედზე.

***გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა* 1.2.** ვიტყვით, რომ $p \in D_+(I)$ თუ $p \in L(I;\, \mathbb{R}_0^+)$, და (1.1), (1.3_2) ამოცანას გააჩნია ისეთი u ამონახსნი, რომ

$$u(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a, b[\,. \tag{1.5}$$

***გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა* 1.3.** ვიტყვით, რომ $p \in D_-(I)$ თუ $p \in L(I;\, \mathbb{R}_0^-)$, და (1.1), (1.3_3) ამოცანას გააჩნია ისეთი u ამონახსნი, რომლისთვისაც სრულდება (1.5) უტოლობა.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.1.** დავუშვათ $p \in L(I;\, \mathbb{R}_0^+)\,(p \in L(I;\, \mathbb{R}_0^-)),$ და განვიხილოთ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = \lambda^4 p(t) u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.6}$$

როგორც 1.8 ლემიდან დავინახავთ სიმრავლე $D_+(I)\,(D_-(I))$ შეიძლება გაგებულ იქნას როგორც ისეთი $p : I \to \mathbb{R}_0^+\,(\mathbb{R}_0^-)$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებისთვისაც $\lambda = 1$ არის (1.6), (1.3_2) ((1.6), (1.3_1) და (1.6), (1.3_3)) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი. აგრეთვე ფაქტი, რომ რიცხვი $\lambda > 0$ არის (1.6), (1.3_2) ((1.6), (1.3_1) ან (1.6), (1.3_3)) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი, ეკვივალენტურია $\lambda^4 p \in D_+(I)$ $(\lambda^4 p \in D_-(I))$ ჩართვის.

1.1.1 $u^{(4)} = pu$ *განტოლების არარხევადობა*

• *არაუარყოფითი p კოეფიციენტის შემთხვევა.* პირველ რიგში (1.1) განტოლება განვიხილოთ მაშინ, როდესაც p არაუარყოფითი ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია არარხევადობის შემდეგი კრიტერიუმი:

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.1.** დავუშვათ $p \in L(I;\, \mathbb{R}_0^+)$. მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I მონაკვეთზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მოიძებნება $p^* \in D_+(I)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$p(t) \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.7}$$

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.2.** 1.1 თეორემიდან ცხადია, რომ თუ $x,\ y \in D_+(I)$, მაშინ $x \preccurlyeq y$ და $y \preccurlyeq x$ უტოლობებიდან ვერცერთი ვერ შესრულდება.

***შ ე დ ე გ ი* 1.1.** დავუშვათ $p \in L(I;\, \mathbb{R}_0^+),\ p \not\equiv 0$, და $\lambda_0 > 0$ არის (1.6), (1.3_2) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი. ასეთ შემთხვევაში (1.1) ამოცანა არარხევადია I შუალედზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\lambda_0 > 1$.

თუ $\lambda_1 > 0$ არის

$$u^{(4)}(t) = \lambda^4 u(t), \qquad u^{(j)}(0) = 0, \quad u^{(j)}(1) = 0\ (j = 0, 1), \tag{1.8}$$

ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი, მაშინ 1.1 შენიშვნის თანახმად $\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \in D_+(I)$ და ამიტომ 1.1 თეორემიდან და 1.2 შენიშვნიდან გამომდინარეობს:

***შ ე დ ე გ ი* 1.2.** (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე როდესაც

$$0 \leq p(t) \preccurlyeq \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{1.9}$$

და რხევადია როდესაც

$$p(t) \geq \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.10}$$

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.3.** ცნობილია, რომ (1.8) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი λ_1 არის $\cos\lambda \cdot \cosh\lambda = 1$ განტოლების პირველი დადებითი ამონახსნი და $\lambda_1 \approx 4.73004$ (იხ. [10], [35]). აქვე უნდა ითქვას, რომ ნაშრომში [35, თეორემა 3.1] დამტკიცებულ იქნა, რომ $u^{(4)} = \lambda^4 u$ განტოლება არარხევადია $[0, 1]$ შუალედზე თუ $0 \leq \lambda < \lambda_1$, რაც 1.2 შედეგის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებისათვის.

ახლა მოვიყვანოთ არარხევადობის ერთი ეფექტური პირობა, რომელიც სამართლიანია მაშინაც თუ (1.9) და (1.10) პირობებიდან არცერთი არ სრულდება.

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.2.** დავუშვათ $p \in L(I; \mathbb{R}_0^+)$, და მოიძებნება $M \in \mathbb{R}_0^+$ ისეთი, რომ

$$M\frac{b-a}{2} + \int_a^b [p(s) - M]_+ ds \leq \frac{192}{(b-a)^3}. \tag{1.11}$$

მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

აქვე მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს ისეთი $p \in L(I; \mathbb{R}_0^+)$ ფუნქციის არსებობას, რომ:

ა. (1.9) და (1.10) პირობები ერთდროულად ირღვევა და მიუხედავად ამისა სრულდება (1.11) პირობა და ამდენად (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე;

ბ. (1.11) პირობა ირღვევა თუ M მუდმივი მის ექსტრემალურ მნიშვნელობებს 0 და $\operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} p(t)$ ღებულობს და მიუხედავად ამისა, მოიძებნება ისეთი $M \in]0, \ \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} p(t)[$, რომლისთვისაც სრულდება (1.11) პირობა.

***მ ა გ ა ლ ი თ ი* 1.1.** დავუშვათ $a = 0$, $b = 1$, და $p(t) = 800t^3$ თუ $t \in I$. მაშინ, როგორც ადვილი დასანახია, (1.9) და (1.10) პირობები ირღვევა და არც (1.11) პირობა სრულდება თუ $M = 0$ ან $M = 800$. მეორე მხრივ (1.11) პირობა შესრულდება თუ $M = 864/5$. მართლაც, იმის გათვალისწინებით, რომ $p(3/5) = 864/5$ მივიღებთ

$$\frac{432}{5} + \int_0^1 \Big[800s^3 - \frac{864}{5}\Big]_+ ds = \frac{432}{5} + \int_{3/5}^1 \Big(800s^3 - \frac{864}{5}\Big) ds = \frac{4784}{25} < 192.$$

• *არადადებითი p კოეფიციენტის შემთხვევა.* ახლა (1.1) განტოლება განვიხილოთ მაშინ, როდესაც p კოეფიციენტი არადადებითი ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია არარხევადობის შემდეგი კრიტერიუმი:

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.3.** დავუშვათ $p \in L(I; \mathbb{R}_0^-)$. მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I მონაკვეთზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ მოიძებნება $p_* \in D_-(I)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$p(t) \succcurlyeq p_*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.12}$$

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.4.** 1.3 თეორემიდან ცხადია, რომ თუ $x, \ y \in D_-(I)$, მაშინ $x \preccurlyeq y$ და $y \preccurlyeq x$ უტოლობებიდან ვერცერთი ვერ შესრულდება.

***შ ე დ ე გ ი* 1.3.** დავუშვათ $p \in L(I; \mathbb{R}_0^-)$, $\ p \not\equiv 0$, და $\lambda_0 > 0$ არის (1.6), (1.3$_3$) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი. ასეთ შემთხვევაში (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\lambda_0 > 1$.

თუ $\lambda_2 > 0$ არის

$$u^{(4)}(t) = -\lambda^4 u(t), \qquad u^{(j)}(0) = 0 \ (j = 0, 1, 2), \ \ u(1) = 0, \tag{1.13}$$

ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი მაშინ 1.1 შენიშვნის თანახმად $-\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \in D_-(I)$, და ამიტომ 1.3 თეორემიდან და 1.4 შენიშვნიდან გამომდინარეობს:

***შ ე დ ე გ ი* 1.4.** (1.1) განტოლება არარხევადია I სიმრავლეზე როდესაც

$$-\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \preccurlyeq p(t) \leq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{1.14}$$

და რხევადია როდესაც

$$p(t) \leq -\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.15}$$

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.5.** ცნობილია, რომ (1.13) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი λ_2 არის $\tanh \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = \tan \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ განტოლების პირველი დადებით ამონახსნი და $\lambda_2 \approx 5.553$ (იხ. [9], [10]). აქვე უნდა ითქვას რომ ნაშრომში [35, თეორემა 3.5] დამტკიცებულ იქნა, რომ $u^{(4)} = -\lambda^4 u$ განტოლება არარხევადია $[0, 1]$ შუალედზე თუ $0 \leq \lambda < \lambda_2$, რაც 1.4 შედეგის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებისათვის.

ახლა მოვიყვანოთ არარხევადობის ერთი ეფექტური პირობა, რომელიც სამართლიანია მაშინაც თუ (1.14) და (1.15) პირობებიდან არცერთი არ სრულდება.

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.4.** დავუშვათ $p \in L(I; \mathbb{R}_0^-)$, და მოიძებნება $M \in \mathbb{R}_0^+$ ისეთი, რომ

$$M\frac{495}{1024}(b-a) + \int_a^b [p(s) + M]_- ds \leq \frac{110}{(b-a)^3}. \tag{1.16}$$

მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

1.1 მაგალითის ანალოგიური მაგალითი აიგება 1.4 თეორემის შემთხვევაშიც.

• *არა აუცილებლად ნიშანმუდმივი p კოეფიციენტის შემთხვევა.* როგორც ცნობილია ნიშანცვლადი p კოეფიციენტის შემთხვევაში (1.1) განტოლებისთვის დასმული სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნადობის პირობები განსაკუთრებით რთული მისაღებია. იგივეა სამართლიანი ამ განტოლების არარხევადობისთვისაც. ამიტომ განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, შემდეგი არარხევადობის თეორემა, რომელიც შეზღუდვებს ადებს ცალ - ცალკე p კოეფიციენტის დადებით და უარყოფით ნაწილებს და გარკვეული გაგებით ოპტიმალურია.

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.5.** დავუშვათ $p_* \in D_-(I)$, $p^* \in D_+(I)$, და $p \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს

$$p_*(t) \preccurlyeq -[p(t)]_-, \qquad [p(t)]_+ \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.17}$$

მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

უკანასკნელი თეორემა ოპტიმალურია იმ გაგებით, რომ (1.17) პირობები არ შეიძლება შევცვალოთ $p_* \le p \le p^*$ პირობით.

აგრეთვე ეს თეორემა გარკვეული გაგებით ავსებს ვ. კონდრატიევის კარგად ცნობილ შედარების თეორემას $n = 4$ შემთხვევაში.

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.6.** ([30, კონდრატიევი, თეორემა 2]) დავუშვათ $p_1, p_2 \in C(I;\mathbb{R})$ და განტოლებები

$$u^{(4)}(t) = p_1(t)u(t), \qquad u^{(4)}(t) = p_2(t)u(t), \tag{1.18}$$

არარხევადია I შუალედზე. მაშინ თუ I შუალედზე დაცულია

$$p_1(t) \le p(t) \le p_2(t) \tag{1.19}$$

უტოლობა, (1.1) განტოლებაც არარხევადი იქნება ამ შუალედზე.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.6.** როგორც ვხედავთ კონდრატიევის შედარების თეორემაში უწყვეტი p_1 და p_2 კოეფიციენტები დასაშვებია რომ ნიშანცვლადი იყოს და (1.18) განტოლებებს არარხევადობა მოეთხოვება, მაშინ როდესაც 1.5 თეორემაში სულაც არ არის აუცილებელი (1.18) განტოლებების არარხევადობა თუმცა p_1 და p_2 კოეფიციენტები ნიშანმუდმივი უნდა იყოს. ამიტომ თუ

$$p(t) = \lambda_1^4[cos(2\pi t/n)]_+ - \lambda_2^4[cos(2\pi t/n)]_-,$$

1.5 თეორემიდან გამომდინარეობს (1.1) განტოლების არარხევადობა $[0,\,1]$ შუალედზე, როგორიც არ უნდა იყოს $n \in \mathbb{N}$ (იხ. 1.6 შედეგი), მაშინ როდესაც კონდრატიევის თეორემიდან არ გამომდინარეობს (1.1) განტოლების არარხევადობა $[0,\,1]$ შუალედზე.

თუ $p_* \in D_-(I),\ p^* \in D_+(I)$, და

$$\mathrm{mes}\{\, t \in I \,|\, p_*(t) \cdot p^*(t) \ne 0\} > 0, \tag{1.20}$$

მაშინ ტრივიალურია შემდეგი უტოლობების სამართლიანობა

$$p_* \preccurlyeq -[p_* + p^*]_-, \qquad [p_* + p^*]_+ \preccurlyeq p^*,$$

და ამიტომ 1.5 თეორემიდან გამომდინარეობს:

***შ ე დ ე გ ი* 1.5.** დავუშვათ $p_* \in D_-(I),\ p^* \in D_+(I)$, და სამართლიანია (1.20) უტოლობა. მაშინ (1.1) განტოლება სადაც

$$p = p_* + p^*$$

არარხევადია I შუალედზე.

1.5 თეორემიდან, სადაც $p_* := -\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$ და $p^* := \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$, მივიღებთ:

***შ ე დ ე გ ი* 1.6.** დავუშვათ $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ მუდმივები არის შესაბამისად (1.8) და (1.13) ამოცანების პირველი საკუთარი რიცხვები და

$$-\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \preccurlyeq p(t) \preccurlyeq \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.7.** თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lambda_1^4 \approx 501$ და $\lambda_2^4 \approx 951$, მაშინ ცხადია, რომ 1.6 შედეგი მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს ვ. კაპელის ცნობილ პირობას

$$\max_{t\in[a,\,b]} |p(t)| \le \frac{128}{(b-a)^4},$$

მონოგრაფიიდან [12, თეორემა 1, გვ. 86], რომელიც p კოეფიციენტის უწყვეტობის შემთხვევაში უზრუნველყოფს (1.1) განტოლების I შუალედზე არარხევადობას.

და ბოლოს, განვიხილოთ კიდევ ერთი დებულება რომელიც პირდაპირ გამომდინარეობს კონდრატიევის 1.6 თეორემიდან 1.2 და 1.4 თეორემების გათვალისწინებით.

***შ ე დ ე გ ი* 1.7.** დავუშვათ p ფუნქცია აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$\int_a^b [p(s)]_- ds \le \frac{110}{(b-a)^3}, \qquad \int_a^b [p(s)]_+ ds \le \frac{192}{(b-a)^3}. \tag{1.21}$$

მაშინ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

1.1.2 $u^{(4)} = pu + \mu u$ *განტოლების არარხევადობა*

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.7.** დავუშვათ $p \in L(I;\mathbb{R})$, სრულდება

$$\begin{aligned} \alpha_p &:= \inf_{p^*\in D_+(I)} \{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in I}\{p(t) - p^*(t)\}\} \le 0, \\ \beta_p &:= \sup_{p_*\in D_-(I)} \{\operatorname*{ess\,inf}_{t\in I}\{p(t) - p_*(t)\}\} \ge 0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

პირობები, და $\alpha_p \neq \beta_p$. მაშინ თუ

$$\mu \in]\alpha_p,\ \beta_p[\,, \tag{1.23}$$

განტოლება (1.2) არარხევადია I შუალედზე.

სანამ გადავიდოდეთ ქვევით მოყვანილი ტრივიალური შედეგის განხილვაზე, მკითხველს შევახსენებთ, რომ λ_1 და λ_2 აღნიშნავს შესაბამისად (1.8) და (1.13) ამოცანების პირველ საკუთარ რიცხვებს.

***შ ე დ ე გ ი* 1.8.** დავუშვათ 1.7 თეორემაში $p \equiv \gamma$, სადაც

$$-\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \le \gamma \le \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}. \tag{1.24}$$

მაშინ

$$\alpha_p = \gamma - \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \qquad \text{და} \qquad \beta_p = \gamma + \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4},$$

და (1.2) განტოლება რხევადია I შუალედზე თუ $\mu = \alpha_p$ ან/და $\mu = \beta_p$.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.8.** 1.8 შედეგი პირდაპირ გვიჩვენებს 1.7 თეორემის ოპტიმალურობას იმ გაგებით, რომ $]\alpha_p,\ \beta_p[$ შუალედს ვერ ჩავანაცვლებთ $[\alpha_p,\ \beta_p]$ შუალედით. ამისთვის საკმარისია $u^{(4)} = \gamma u + \mu u$ განტოლებაში ვიგულისხმოთ რომ სამართლიანია (1.24) უტოლობა.

***შ ე დ ე გ ი* 1.9.** დავუშვათ $p \in D_+(I)$. მაშინ

$$\beta_p > \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}, \tag{1.25}$$

და განტოლება (1.2) არარხევადია I შუალედზე თუ $\mu \in]0,\ \beta_p[$.

***შ ე დ ე გ ი* 1.10.** დავუშვათ $p \in D_-(I)$. მაშინ

$$\alpha_p < -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}, \tag{1.26}$$

და განტოლება (1.2) არარხევადია I შუალედზე თუ $\mu \in]\alpha_p,\ 0[$.

უკანასკნელი ორი შედეგიდან მივიღებთ:

***შ ე დ ე გ ი* 1.11.** დავუშვათ

$$\mu \in \Big]0,\ \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}\Big] \ \ \Big(\mu \in \Big[-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4},\ 0\Big[\Big).$$

მაშინ განტოლება (1.2) არარხევადია I შუალედზე ნებისმიერი $p \in D_+(I)$ $(p \in D_-(I))$ ფუნქციისთვის.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.9.** 1.8 შედეგიდან პირდაპირ გამომდინარეობს 1.9 და 1.10 შედეგების ოპტიმალურობა. ამისთვის საკმარისია განვიხილოთ შესაბამისად

$$u^{(4)} = \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}u + \mu u \qquad \text{და} \qquad u^{(4)} = -\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}u + \mu u$$

განტოლებები, რომლებიც $\mu = 0$ შემთხვევაში რხევადები არიან.

1.1.3 $(k, 4-k)$ *ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობა*

ახლა განვიხილოთ ორი მნიშვნელოვანი თეორემა, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ (1.4), (1.3_2) ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობისთვის მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ იმას თუ როგორია p ფუნქციის დადებითი ნაწილი $[p]_+$, და არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს მის უარყოფით ნაწილს, ისევე როგორც (1.4), (1.3_1) და (1.4), (1.3_3) ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობისთვის მნიშვნელოვანია მხოლოდ p ფუნქციის უარყოფითი ნაწილი $[p]_-$, და არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს მის დადებით ნაწილს.

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.8.** დავუშვათ $p_0 \in L(I; \mathbb{R})$ ისეთია რომ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = [p_0(t)]_+ u(t) \tag{1.27}$$

არარხევადია I შუალედზე. მაშინ უტოლობა

$$p(t) \leq p_0(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I \tag{1.28}$$

უზრუნველყოფს (1.4), (1.3_2) ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობას.

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.9.** დავუშვათ $p_0 \in L(I; \mathbb{R})$ ისეთია რომ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = -[p_0(t)]_- u(t) \tag{1.29}$$

არარხევადია I შუალედზე. მაშინ უტოლობა

$$p(t) \geq p_0(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I \tag{1.30}$$

უზრუნველყოფს (1.4), (1.3_1) და (1.4), (1.3_3) ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობას.

თუ შემოვიღებთ $p_0 = [p]_+$, მაშინ 1.1 და 1.8 თეორემებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს:

***შ ე დ ე გ ი* 1.12.** დავუშვათ $p^* \in D_+(I)$ და სრულდება უტოლობა

$$[p(t)]_+ \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{1.31_1}$$

მაშინ ამოცანა (1.4), (1.3_2) ცალსახად ამოხსნადია.

ანალოგიურად თუ შემოვიღებთ $p_0 = -[p]_-$, მაშინ 1.3 და 1.9 თეორემებიდან პირდაპირ გამომდინარეობს:

***შ ე დ ე გ ი* 1.13.** დავუშვათ $p_* \in D_-(I)$ და სრულდება უტოლობა

$$-[p(t)]_- \succcurlyeq p_*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I \tag{1.31_2}$$

მაშინ (1.4), (1.3_1) და (1.4), (1.3_3) ამოცანები ცალსახად ამოხსნადია.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 1.10.** 1.12 (1.13) შედეგში (1.31_1) ((1.31_2)) პირობა ოპტიმალურია იმ გაგებით, რომ $\preccurlyeq$ ($\succcurlyeq$) უტოლობას ვერ ჩავანაცვლებთ $\leq$ ($\geq$) უტოლობით.

შ ე დ ე გ ი **1.14.** დავუშვათ მოიძებნება $M \in \mathbb{R}_0^+$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა

$$M\frac{b-a}{2} + \int_a^b [[p(s)]_+ - M]_+ ds \le \frac{192}{(b-a)^3}. \tag{1.32_1}$$

მაშინ ამოცანა (1.4), (1.3_2) ცალსახად ამოხსნადია.

შ ე დ ე გ ი **1.15.** დავუშვათ მოიძებნება $M \in \mathbb{R}_0^+$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა

$$M\frac{495}{1024}(b-a) + \int_a^b [[p(s)]_- - M]_+ ds \le \frac{110}{(b-a)^3}. \tag{1.32_2}$$

მაშინ (1.4), (1.3_1) და (1.4), (1.3_3) ამოცანები ცალსახად ამოხსნადია.

1.14 (1.15) შედეგის სამართლიანობა გამომდინარეობს 1.8 (1.9) თეორემიდან და იმ ფაქტიდან, რომ 1.2 (1.4) თეორემის თანახმად (1.32_1) ((1.32_2)) პირობა უზრუნველყოფს (1.27) ((1.29)) განტოლების არარხევადობას.

ნაშრომში [7, ე. ბრავი] დამტკიცებულია, რომ თუ $p \in L_\infty(I; \mathbb{R}_0^+)$ და

$$M = 0 \quad \text{ან} \quad M = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} p(t),$$

მაშინ (1.32_1) პირობა უზრუნველყოფს (1.4), (1.3_2) ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობას.

1.1.4 $(k,\, 4-k)$ *ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობა*

როგორც ეს [12, ვ. კაპელი] მონოგრაფიაშია ნაჩვენები, (1.2) განტოლების არარხევადობა (1.2), (0.2_k) ($k \in \{1, 2, 3\}$) ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის მხოლოდ საკმარისი პირობაა. ანუ (1.2) განტოლების რხევადობის პირობებშიც შეიძლება რომ აღნიშნულ ამოცანებს გააჩნდეს ნიშანმუდმივი გრინის ფუნქციები.

ახლა ჩვენ დავამტკიცებთ (1.2), (1.3_2) და (1.2), (1.3_3) ამოცანების გრინის ფუნქციის ნიშანმუდმივობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს. აგრეთვე მოვიყვანთ ისეთი p კოეფიციენტებისა და μ პარამეტრების მაგალითებს რომლებისთვისაც ხსენებული ამოცანების გრინის ფუნქციები ნიშანმუდმივია მაშინ, როდესაც (1.2) განტოლება რხევადია I შუალედზე (იხილეთ მაგალითი 1.2).

თ ე ო რ ე მ ა **1.10.** დავუშვათ $p \in D_+(I) \cap C(I; \mathbb{R})$. მაშინ:

ა. (1.2), (1.3_2) ამოცანის გრინის ფუნქცია არაუარყოფითია $I \times I$ სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in]0,\, \mu_p],$$

სადაც $\mu_p := \min\{\mu_1^*,\, \mu_3^*\}$, და μ_k^* ($k = 1, 3$) არის (1.2), (1.3_k) ამოცანის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი;

ბ. სამართლიანია შეფასება

$$\mu_p \ge \beta_p > \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}.$$

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.11.** დავუშვათ $p \in D_-(I) \cap C(I; \mathbb{R})$. მაშინ:

ა. $(1.2), (1.3_2)$ ამოცანის გრინის ფუნქცია არაუარყოფითია $I \times I$ სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in \,]\mu_p, 0],$$

სადაც μ_p არის $(1.2), (1.3_2)$ ამოცანის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი;

ბ. სამართლიანია შეფასება

$$\mu_p \le \alpha_p < -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}.$$

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.12.** დავუშვათ $p \in D_+(I) \cap C(I; \mathbb{R})$. მაშინ:

ა. $(1.2), (1.3_1)$ ამოცანის გრინის ფუნქცია არადადებითია $I \times I$ სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in \, [0, \mu_p[\,,$$

სადაც μ_p არის (1.2), (1.3_1) ამოცანის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი;

ბ. სამართლიანია შეფასება

$$\mu_p \ge \beta_p > \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}.$$

***თ ე ო რ ე მ ა* 1.13.** დავუშვათ $p \in D_-(I) \cap C(I; \mathbb{R})$. მაშინ:

ა. $(1.2), (1.3_1)$ ამოცანის გრინის ფუნქცია არადადებითია $I \times I$ სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in [\mu_p, 0[\,,$$

სადაც μ_p არის $(1.2), (1.3_2)$ ამოცანის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი;

ბ. სამართლიანია შეფასება

$$\mu_p \le \alpha_p < -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}.$$

***მ ა გ ა ლ ი თ ი* 1.2.** დავუშვათ

$$p \equiv \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \quad \text{და} \quad \mu = \frac{\lambda_1^4 + \lambda_2^4}{(b-a)^4}.$$

მაშინ 1.8 შედეგის ძალით $\beta_p = \frac{\lambda_1^4+\lambda_2^4}{(b-a)^4}$, და (1.2) განტოლება იქნება რხევადი, მაშინ როდესაც 1.10 თეორემის ძალით $(1.2), (1.3_2)$ ამოცანის გრინის ფუნქცია იქნება არაუარყოფითი.

აგრეთვე, თუ

$$p \equiv -\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \quad \text{და} \quad \mu = 0,$$

მაშინ 1.8 შედეგის ძალით $\beta_p = 0$, და (1.2) განტოლება იქნება რხევადი, მაშინ როდესაც 1.11 თეორემის ძალით $(1.2), (1.3_2)$ ამოცანის გრინის ფუნქცია იქნება არაუარყოფითი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.11. თუ u არის (1.2), (1.3$_3$) ამოცანის ამონახსნი მაშინ $v(t) = u(b + a - t)$ ფუნქცია იქნება

$$v^{(4)}(t) = p(b + a - t)v(t) - \mu v(t),$$
$$v(a) = 0, \quad v^{(j)}(b) = 0 \ (j = 0, 1, 2),$$

ამოცანის ამონახსნი და ამგვარად 1.12, 1.13 თეორემებიდან აგრეთვე გამომდინარეობს აუცილებელი და საკმარისი პირობები (1.2), (1.3$_3$) ამოცანის გრინის ფუნქციების არადადებითობისთვის.

1.2 დამხმარე დებულებები

განვიხილოთ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = p_1(t)u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \tag{1.33}$$

სადაც $p_1 \in L_{loc}(\mathbb{R}_0^+; \mathbb{R})$. მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ წერტილისათვის მის შეუღლებულ $\eta(t_0, p_1)$ წერტილს და $\tau(t_0, p_1)$ რიცხვს ჩვენ შემოვიღებთ ისე, როგორც ეს [28, ი. კიღურაძე, თ. ჭანტურია] მონოგრაფიაშია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.4. დავუშვათ $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, და $F(t_0, p_1)$ არის ისეთი $t_1 > t_0$ წერტილების სიმრავლე რომელთათვისაც (1.33) განტოლების ერთ მაინც ამონახსნს $[t_0, t_1]$ შუალედში გააჩნია ოთხი ნული (ჯერადობების ჩათვლით). მაშინ ვიტყვით, რომ (1.33) განტოლებისთვის

$$\eta(t_0, p_1) := \inf F(t_0, p_1)$$

არის t_0 წერტილის პირველი შეუღლებული წერტილი და ჩავთვლით, რომ $\eta(t_0, p_1) = +\infty$ თუ $F(t_0, p_1) = \emptyset$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.5. დავუშვათ $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, და $E(t_0, p_1)$ არის ისეთი $t_1 > t_0$ წერტილების სიმრავლე რომელთათვისაც მოიძებნება (1.33) განტოლების ისეთი u ამონახსნი, რომ

$$u(t_0) = u(t_1) = 0, \quad u(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]t_0, t_1[\,.$$

მაშინ

$$\tau(t_0, p_1) := \sup E(t_0, p_1).$$

აგრეთვე ნებისმიერი $x : I \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის შემოვიღოთ ფუნქციები $x_-, x_+ : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ შემდეგი წესით

$$x_\pm(t) = \begin{cases} x(t) & \text{თუ} \ \ t \in I \\ \pm 1 & \text{თუ} \ \ t \in \mathbb{R}_0^+ \setminus I \end{cases}. \tag{1.34}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1.12. [28] მონოგრაფიის 2.15 თეორემიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $a_0 \in [a, b]$ წერტილისათვის $\eta(a_0, x_\pm) < +\infty$.

ახლა დავუშვათ, რომ

$$p_1(t) \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \tag{1.35}$$

ან

$$p_1(t) \leq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \tag{1.36}$$

და მოვიყვანოთ $\eta(t_0,\, p_1),\, \tau(t_0, p_1) \in \mathbb{R}^+$ რიცხვების ჩვენთვის მნიშვნელოვანი ზოგიერთი თვისება.

***ლ ე მ ა* 1.1.** [24, შედეგი 5.1] ვთქვათ დაცულია (1.35) პირობა და $\eta(x, p_1) < +\infty$ თუ $x \in [t_*,\, t^*]$. მაშინ

$$\eta(t_*, p_1) < \eta(t^*, p_1).$$

***ლ ე მ ა* 1.2.** [32, თეორემა 8.6] ვთქვათ დაცულია (1.36) პირობა და $0 < t_* < t^*$. მაშინ

$$\eta(t_*, p_1) < \eta(t^*, p_1).$$

***ლ ე მ ა* 1.3.** [32, თეორემა 10.1] დავუშვათ

$$p_1(t) \leq p_2(t) \leq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ წერტილისათვის დაცული იქნება უტოლობა

$$\eta(t_0,\, p_1) \leq \eta(t_0,\, p_2).$$

***ლ ე მ ა* 1.4.** [28, ლემა 2.10] დავუშვათ სამართლიანია (1.35) პირობა. მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in R_0^+$ წერტილისათვის დაცული იქნება ტოლობა $\tau(t_0,\, p_1) = \eta(t_0,\, p_1)$.

***ლ ე მ ა* 1.5.** [28, ლემა 1.16] დავუშვათ

$$p_1(t) \geq p_2(t) \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ წერტილისათვის დაცული იქნება უტოლობა $\tau(t_0, p_1) \leq \tau(t_0, p_2)$.

აქვე მოვიყვანოთ ერთი კარგად ცნობილი დებულება (იხ. [4], [5], [17]- [19], [32]) რომელსაც ჩამოვაყალიბებთ იმ ფორმით როგორც ეს [2] ნაშრომშია.

***დ ე ბ უ ლ ე ბ ა* 1.1.** დავუშვათ $n \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n-1$, და განვიხილოთ ამოცანა

$$\begin{gathered} w^{(n)}(t) = \lambda p(t) w(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \\ w^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad w^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, n-k), \end{gathered} \tag{1.37}$$

სადაც $\lambda \in \mathbb{R}$, და $p \in L(I; \mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$(-1)^{n-k} p(t) \succcurlyeq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

მაშინ (1.37) ამოცანას გააჩნია ნამდვილი საკუთარი რიცხვების ისეთი უსასრულო მიმდევრობა $\{\lambda_m\}_{m=0}^{+\infty}$, რომ

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \lambda_{m+1} < \cdots, \qquad \lim_{m \to +\infty} \lambda_m = +\infty,$$

და ყოველ λ_m საკუთარ რიცხვს შეესაბამება არსებითად ერთადერთი u_{λ_m} ამონახსნი ზუსტად m ცალი მარტივი ნულით $]a,\, b[$ შუალედში.

ლ ე მ ა 1.6. [28, ლემა 1.9, შენიშვნა 1.6] ვთქვათ $\eta(a, p_1) < +\infty$. მაშინ მოიძებნება (1.33) განტოლების $]a, \eta(a, p_1)[$ შუალედზე დადებითი ისეთი u ამონახსნი და $k \in \{1, 2, 3\}$ რიცხვი, რომ

$$u^{(j_1-1)}(a) = 0 \; (j_1 = 1, \dots, k), \qquad u^{(j_2-1)}(\eta(a, p_1)) = 0 \; (j_2 = 1, \dots, 4-k). \tag{1.38}$$

მეტიც, თუ ამასთანავე დაცულია (1.35) ((1.36)) პირობა, მაშინ $k = 2$ ($k = 1$ ან/და $k = 3$).

შემდეგი დებულება აძლიერებს უკანასკნელ ლემას.

ლ ე მ ა 1.7. დავუშვათ სრულდება (1.36) პირობა. მაშინ (1.33), (1.38) ამოცანას გააჩნია $]a, \eta(a, p_1)[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი როგორც $k = 1$ ისე $k = 3$ შემთხვევაში.

დამტკიცება. ადვილი დასანახია რომ (1.33), (1.38) ($k = 3$) და (1.33), (1.38) ($k = 1$) შეუღლებული ამოცანები არიან და როგორც ცნობილია ამ ამოცანებს ერთი და იგივე საკუთარი რიცხვები გააჩნიათ (იხ. [46, მ. ნაიმარკი]) რაც 1.1 დებულებასთან ერთად იმას ნიშნავს, რომ (1.33), (1.38) ($k = 3$) ამოცანის m-ური საკუთარი რიცხვი აგრეთვე (1.33), (1.38) ($k = 1$) ამოცანის m-ური საკუთარი რიცხვი იქნება და პირიქით.

ახლა დავუშვათ, რომ (1.33), (1.38) ($k = 3$) ამოცანას გააჩნია $]a, \eta(a, p_1)[$ შუალედზე დადებითი u_1 ამონახსნი. 1.1 დებულების თანახმად ეს იმას ნიშნავს, რომ $\lambda_1 = 1$ არის (1.37) ($n = 4,\, k = 3$) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი, მაშინ ნათქვამის თანახმად $\lambda_1 = 1$ იქნება აგრეთვე (1.37) ($n = 4,\, k = 1$) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვიც. ანუ (1.33), (1.38) ($k = 1$) ამოცანასაც ექნება $]a, \eta(a, p_1)[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ თუ (1.33), (1.38) ($k = 1$) ამოცანას აქვს $]a, \eta(a, p_1)[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი, მაშინ იგივე ითქმის (1.33), (1.38) ($k = 3$) ამოცანაზეც.

მაშინ დამტკიცების დასასრულებლად იმის შენიშვნაღა დაგვრჩა, რომ 1.6 ლემის ძალით (1.33), (1.38) ($k = 1$) და (1.33), (1.38) ($k = 3$) ამოცანებიდან ერთ-ერთს აუცილებლად გააჩნია $]a, \eta(a, p_1)[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი. $\square$

ქვევით მოყვანილ ლემაში $p_\pm$ ფუნქციები წარმოადგენს (1.34) ტოლობების საშუალებით p ფუნქციის არაუარყოფით ნახევარღერძზე გაგრძელებებს.

ლ ე მ ა 1.8. დავუშვათ $\lambda > 0$ და $p \in L(I; \mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას $p \not\equiv 0$. მაშინ შემდეგი წინადადებები ეკვივალენტურია:
ა. $\lambda^4 p \in D_+(I)$ ($\lambda^4 p \in D_-(I)$);
ბ. $\eta(a, \lambda^4 p_+) = b$ ($\eta(a, \lambda^4 p_-) = b$);
გ. λ არის (1.6), (1.3$_2$) ((1.6), (1.3$_1$) და (1.6), (1.3$_3$)) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი.

დამტკიცება. ვთქვათ $p \geq 0$.

ა. წინადადებიდან და 1.4, 1.5 განსაზღვრებებიდან ცხადია რომ $\eta(a, \lambda^4 p_+) \leq b \leq \tau(a, \lambda^4 p_+)$. მაშინ 1.4 ლემიდან გამომდინარეობს ბ. წინადადების სამართლიანობა.

ბ. წინადადებიდან 1.6 ლემის ძალით, სადაც $k = 2$, გამომდინარეობს ა.

აგრეთვე ა. და გ. წინადადებების და ამდენად გ. და ბ. წინადადებების ეკვივალენტობა, პირდაპირ გამომდინარეობს 1.1 დებულებიდან, სადაც $k = 2$.

ახლა დავუშვათ, რომ $p \leq 0$.

ა. წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ (1.1), (1.3$_3$) ამოცანას გააჩნია $]a, b[$, შუალედზე დადებითი u_0 ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\eta(a, \lambda^4 p_-) \leq b$. დავუშვათ $\eta(a, \lambda^4 p_-) < b$, მაშინ ცხადია, რომ შესრულდება უტოლობა

$$u_0(\eta(a, \lambda^4 p_-)) > 0. \tag{1.39}$$

აგრეთვე 1.7 ლემის თანახმად (1.1), (1.38) ($k = 3$) ამოცანას, გააჩნია $]a, \eta(a, \lambda^4 p_-)[$ შუალედზე დადებითი u_1 ამონახსნი. ახლა შევნიშნავთ, რომ კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის ძალით ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $u_\ell'''(a) = 1$ $(\ell = 0, 1)$, რადგან $u_\ell \not\equiv 0$. მაშინ ცხადია, რომ ფუნქცია $v = u_1 - u_0$ იქნება (1.1) განტოლების ამონახსნი და (1.39) უტოლობის გათვალისწინებით დააკმაყოფილებს პირობებს

$$v^{(i)}(a) = 0 \ (i = 0, 1, 2, 3), \qquad v(\eta(a, \lambda^4 p_-)) = -u_0(\eta(a, \lambda^4 p_-)) < 0,$$

რაც ეწინააღმდეგება (1.1) განტოლებისთვის კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას. ამდენად ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და სრულდება ბ. წინადადება.

აგრეთვე ბ. წინადადებიდან 1.7 ლემის ძალით, სადაც $k = 3$, ცხადია ა. წინადადების სამართლიანობა.

ა. და გ. წინადადებების, და ამდენად გ. და ბ. წინადადებების ეკვივალენტურობა, პირდაპირ გამომდინარეობს 1.1 დებულებიდან, სადაც $k = 3$, და 1.7 ლემიდან. $\square$

***ლ ე მ ა* 1.9.** ვთქვათ $\sigma \in \{-1, 1\}$ და $p \in L(I; \mathbb{R})$ ფუნქცია ისეთია, რომ

$$\sigma p(t) \succcurlyeq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{1.40}$$

და განტოლება

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) \tag{1.41}$$

არარხევადია I შუალედზე. მაშინ მოიძებნენა ისეთი $\varepsilon_0 > 0$ რიცხვი, რომ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = p_\varepsilon(t)u(t),$$

სადაც $p_\varepsilon = p + \sigma\varepsilon$, არარხევადია I შუალედზე ნებისმიერი $\varepsilon \in [0, \ \varepsilon_0]$ რიცხვისთვის.

დამტკიცება. დავუშვათ რომ ჩვენი ლემა მცადარია. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon_0 > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\varepsilon_m \in]0, \ \varepsilon_0]$ რიცხვების ისეთი კლებადი მიმდევრობა რომ

$$\lim_{m \to +\infty} \varepsilon_m = 0, \tag{1.42}$$

და განტოლება $u^{(4)} = p_{\varepsilon_m} u$ რხევადია I შუალედზე. ამიტომ (1.41) განტოლების I შუალედზე არარხევადობით, 1.4, 1.5 ლემებით თუ $\sigma = 1$, და 1.3 ლემით თუ $\sigma = -1$, (1.42) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} a < \eta(a, \ p_{\varepsilon_0 +}) \leq b_m \leq b_{m+1} \leq b < \eta(a, \ p_+) \qquad &\text{თუ} \quad \sigma = 1, \\ a < \eta(a, \ p_{\varepsilon_0 -}) \leq b_m \leq b_{m+1} \leq b < \eta(a, \ p_-) \qquad &\text{თუ} \quad \sigma = -1, \end{aligned} \tag{1.43}$$

როდესაც $m \in \mathbb{N}$, სადაც $b_m := \eta(a,\ p_{\varepsilon_m \pm})$. აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ $b_0 := \lim\limits_{m\to+\infty} b_m$, მაშინ (1.43) უტოლობებიდან მივიღებთ $a < b_0 \leq b$. ახლა შემოვიღოთ მუდმივი k_σ ტოლობით

$$k_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{თუ } \ \sigma = -1 \\ 2 & \text{თუ } \ \sigma = 1 \end{cases}.$$

მაშინ 1.6 ლემის ძალით თუ $\sigma = 1$ და 1.7 ლემის ძალით თუ $\sigma = -1$ ამოცანას

$$\begin{gathered} v_m^{(4)}(t) = p_{\varepsilon_m}(t) v_m(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in [a,\ b_m], \\ v_m^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k_\sigma), \qquad v_m^{(j_2-1)}(b_m) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4 - k_\sigma), \end{gathered} \tag{1.44}$$

გააჩნია არანულოვანი v_m ამონახსნი.

მეორე მხრივ (1.44) სასაზღვრო პირობებიდან, როლის თეორემით გამომდინარეობს, რომ ყველა $m \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $c_{rm} \in [a,\ b_m]$ წერტილი, რომ $v_m^{(r)}(c_{rm}) = 0$ $(r = 1, 2, 3)$, და შესაბამისად

$$v_m(t) = \int_a^t \int_{c_{1m}}^{s_1} \int_{c_{2m}}^{s_2} \int_{c_{3m}}^{s_3} p_{\varepsilon_m}(s_4) v_m(s_4) ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 \qquad \text{თუ} \quad t \in [a,\ b_m] \ (m \in \mathbb{N}). \tag{1.45}$$

ახლა, ზოგადობის შეუზღუდავად, დავუშვათ რომ $||v_m||_C = 1$ $(m \in \mathbb{N})$ და $w_{jm} \in C(I; \mathbb{R})$ ფუნქციები განისაზღვრება ტოლობებით

$$w_{jm}(t) = \begin{cases} v_m^{(j)}(t) & \text{თუ } \ t \in [a,\ b_m] \\ v_m^{(j)}(b_m) & \text{თუ } \ t \in]b_m,\ b] \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, 3,\ m \in \mathbb{N}),$$

მაშინ (1.45) ტოლობიდან ცხადია რომ

$$||w_{jm}||_C \leq (1 + b - a)^3 (\varepsilon_0 (b - a) + ||p_1||_L) \ (j = 0, 1, 2, 3,\ m \in \mathbb{N}).$$

ამგვარად არცელა-ასკოლის თეორემის თანახმად, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ $\{w_{jm}\}_{m=1}^{+\infty}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ მიმდევრობები თანაბრად კრებადია I შუალედზე და თუ

$$v_0(t) := \lim_{m\to+\infty} w_{0m}(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,$$

მაშინ

$$\lim_{m\to+\infty} w_{jm}(t) = v_0^{(j)}(t) \ (j = 1, 2, 3) \qquad \text{თუ} \quad t \in [a,\ b_0],$$

$||v_0||_C = 1$, და (1.44) სასაზღვრო პირობების ძალით მივიღებთ

$$v_0^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k_\sigma), \qquad v_0^{(j_2-1)}(b_0) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4 - k_\sigma). \tag{1.46}$$

მეტიც, ნებისმიერი დაფიქსირებული t წერტილისთვის $[a,\ b_0[$ შუალედიდან, თუ m_0 იმდენად დიდია, რომ შესრულდეს უტოლობა $b_{m_0} > t$, მივიღებთ

$$w_{3m}(t) = w_{3m}(a) + \int_a^t p_{\varepsilon_k}(s) w_{0m}(s) ds \qquad \text{თუ} \quad m > m_0,$$

და თუ გადავალთ ზღვარზე როცა $m \to +\infty$, (1.42) ტოლობით მივიღებთ

$$v_0^{(3)}(t) = v_0^{(3)}(a) + \int_a^t p(s)v_0(s)ds.$$

ამიტომ $v_0^{(4)}(t) = p(t)v_0(t)$ თუ $t \in [a,\ b_0]$, და (1.46) პირობებიდან გამომდინარეობს უტოლობა $\eta(a, p_+) \le b$ თუ $\sigma = 1$, და $\eta(a, p_-) \le b$ თუ $\sigma = -1$, რაც ეწინააღმდეგება (1.43) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ჩვენს ლემას. □

ახლა განვიხილოთ ოპერატორი $T[\mu] : C^4(I; \mathbb{R}) \to C(I; \mathbb{R})$ და სიმრავლეები X_k განსაზღვრული ტოლობებით

$$T[\mu]u(t) := u^{(4)}(t) + (\mu - p(t))u(t),$$

და

$$X_k := \{u \in C^4(I; \mathbb{R}) : u^{(j_1-1)}(a) = 0\ (j_1 = 1, \dots, k),\ \ u^{(j_2-1)}(b) = 0\ (j_2 = 1, \dots, 4-k)\},$$

სადაც $k \in \{1, 2, 3\}$. აგრეთვე განვიხილოთ განსაზღვრება:

***გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა* 1.6.** $T[\mu]$ ოპერატორს ეწოდება შებრუნებულად დადებითი (უარყოფითი) (inverse-positive, inverse-negative) X_k სიმრავლეზე თუ ყოველი ისეთი $x \in X_k$ ფუნქციისთვის რომ $T[\mu]x \ge 0$, სამართლიანია უტოლობა $x \ge 0$ $(x \le 0)$.

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება $T[\mu]$ ოპერატორის შებრუნებულად დადებითობის (უარყოფითობის) შემდეგი კრიტერიუმები:

***ლ ე მ ა* 1.10.** [9, თეორემა 3.1 თუ $n = 4$, $k = 2$] ვთქვათ $p \in C(I; \mathbb{R})$, და $\mu_1 \in \mathbb{R}$ ისეთია რომ განტოლება $T[\mu_1]u(t) = 0$ არარხევადია I შუალედზე. ასეთ შემთხვევაში $T[\mu]$ ოპერატორი შებრუნებულად დადებითია X_2 სიმრავლეზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in]\mu_1 - \lambda_*,\ \mu_1 - \lambda^*],$$

სადაც λ_* არის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი $T[\mu_1]$ ოპერატორის X_2 სიმრავლეზე, და $\lambda^* = \max\{\lambda_1^*,\ \lambda_3^*\}$ თუ $\lambda_k^*\ (k = 1, 3)$ არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი $T[\mu_1]$ ოპერატორის X_k სიმრავლეზე.

***ლ ე მ ა* 1.11.** [9, თეორემა 3.1 თუ $n = 4$, $k = 1$] ვთქვათ $p \in C(I; \mathbb{R})$, და $\mu_1 \in \mathbb{R}$ ისეთია რომ $T[\mu_1]u(t) = 0$ განტოლება არარხევადია I შუალედზე. ასეთ შემთხვევაში $T[\mu]$ ოპერატორი შებრუნებულად უარყოფითია X_1 სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\mu \in [\mu_1 - \lambda_*,\ \mu_1 - \lambda^*[\,,$$

სადაც λ^* არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი $T[\mu_1]$ ოპერატორის X_1 სიმრავლეზე, და λ_* არის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი $T[\mu_1]$ ოპერატორის X_2 სიმრავლეზე.

1.3 ძირითადი შედეგების დამტკიცება

ლემები, რომლებსაც ვიყენებთ ქვევით მოყვანილ დამტკიცებებში $\mathbb{R}_0^+$ ნახევარღერძზე განსაზღვრულ ფუნქციებისთვის გვაქვს დამტკიცებული, ამიტომ ამ დამტკიცებებში მონაწილე ფუნქციებს სასრული I შუალედიდან მთელ $\mathbb{R}_0^+$ ნახევარღერძზე (1.34) ტოლობებით გავაგრძელებთ ხოლმე.

1.1 თეორემის დამტკიცება. $p \equiv 0$ შემთხვევაში ჩვენი თეორემის სამართლიანობა ტრივიალურია, ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $p \not\geq 0$.
საკმარისობა. 1.4 ლემიდან ცხადია, რომ

$$\tau(a,\, p_+) = \eta(a,\, p_+), \qquad \tau(a,\, p_+^*) = \eta(a,\, p_+^*),$$

ხოლო (1.7) პირობიდან 1.5 ლემის ძალით მივიღებთ

$$\tau(a,\, p_+) \geq \tau(a,\, p_+^*),$$

და მაშინ, უკანასკნელი გამოსახულებებიდან ცხადია რომ

$$\eta(a,\, p_+) \geq \eta(a,\, p_+^*).$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ $p^* \in D_+(I)$ ჩართვიდან 1.8 ლემის ძალით გამომდინარეობს $\eta(a,\, p_+^*) = b$ ტოლობა, უკანასკნელი უტოლობა მოგვცემს შეფასებას

$$\eta(a,\, p_+) \geq b. \tag{1.47}$$

მეორე მხრივ $p^* \in D_+(I)$ ჩართვიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} u^{(4)}(t) = p_+^*(t)u(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I, \\ u^{(j)}(a) = 0, \qquad u^{(j)}(b) = 0 \ &(j = 0, 1), \end{aligned} \tag{1.48}$$

ამოცანას გააჩნია $]a,\, b[$ შუალედზე დადებითი u ამონახსნი. ახლა დავუშვათ, რომ $\eta(a,\, p_+) = b$, მაშინ 1.6 ლემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} v^{(4)}(t) = p_+(t)v(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I, \\ v^{(j)}(a) = 0, \qquad v^{(j)}(b) = 0 \ &(j = 0, 1), \end{aligned} \tag{1.49}$$

ამოცანას გააჩნია $]a,\, b[$ შუალედზე დადებითი v ამონახსნი. ასეთ შემთხვევაში თუ (1.48) და (1.49) განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად v და $-u$ ფუნქციებზე, მიღებული ტოლობების სხვაობას ვაინტეგრებთ a-დან b-მდე და გავითვალისწინებთ (1.34) განსაზღვრებას, მივიღებთ

$$\int_a^b u^{(4)}(s)v(s)ds - \int_a^b v^{(4)}(s)u(s)ds = \int_a^b [p^*(s) - p(s)]u(s)v(s)ds.$$

მაშინ თუ უკანასკნელი გამოსახულების მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალებისთვის გამოვიყენებთ ნაწილობით ინტეგრების ფორმულას (1.48) და (1.49) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\int_a^b (p^*(s) - p(s))u(s)v(s)ds = 0,$$

რაც u და v ფუნქციების $]a,\, b[$ შუალედზე დადებითობის ძალით ეწინააღმდეგება (1.7) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება მცდარი იყო, და ამდენად (1.47) უტოლობის ძალით

$$\eta(a,\, p_+) > b. \tag{1.50}$$

ახლა დავუშვათ, რომ (1.1) განტოლება რხევადია I შუალედზე, ანუ მას გააჩნია ისეთი u ამონახსნი, რომელსაც ჯერადობების ჩათვლით ოთხი ნული მაინც აქვს I შუალედში. მაშინ თუ $t_0 \in [a,\, b[$ არის u ამონახსნის პირველი ნული, ცხადია, რომ $\eta(t_0,\, p_+) \in]t_0,\, b]$, და ასეთ შემთხვევაში (1.50) უტოლობის თანახმად

$$\eta(t_0,\, p_+) < \eta(a,\, p_+).$$

მაშინ $t_0 \neq a$, და 1.1 ლემიდან და 1.12 შენიშვნიდან გამომდინარეობს უტოლობა $\eta(t_0,\, p_+) > \eta(a,\, p_+)$, რომელიც წინა უტოლობას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება იყო მცდარი და ამდენად (1.1) განტოლება არარხევადი ყოფილა I შუალედზე.

აუცილებლობა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ 1.1 დებულების თანახმად ამოცანას (1.6), (1.3_2) გააჩნია დადებითი პირველი საკუთარი რიცხვი λ_1, და 1.8 ლემიდან გამომდინარეობს, რომ $p^* := \lambda_1^4 p \in D_+(I)$ და

$$\eta(a,\, \lambda_1^4 p_+) = b. \tag{1.51}$$

ახლა დავუშვათ, რომ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე, მაშინ $\lambda_1 \neq 1$ და $\eta(a,\, p_+) > b$. დავუშვათ $\lambda_1 < 1$. მაშინ $\lambda_1^4 p_+ \preccurlyeq p_+$ და ამიტომ 1.4, 1.5 ლემებიდან მივიღებთ

$$\eta(a,\, \lambda_1^4 p_+) \geq \eta(a,\, p_+) > b,$$

რაც ეწინააღმდეგება (1.51) ტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობიდან გამომდინარეობს, რომ $\lambda_1 > 1$, და ამდენად სრულდება (1.7) უტოლობა, სადაც $p^* \in D_+(I)$. □

1.1 შედეგის დამტკიცება. **საკმარისობა.** ვთქვათ $\lambda_0 > 1$, მაშინ $p \preccurlyeq \lambda_0^4 p$, სადაც 1.8 ლემის თანახმად $\lambda_0^4 p \in D_+(I)$, და ამდენად 1.1 თეორემის ძალით (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

აუცილებლობა. სიტყვასიტყვით იმეორებს 1.1 თეორემის აუცილებლობის დამტკიცებას. □

1.2 თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ რომ (1.1) განტოლება რხევადია I შუალედზე. მაშინ მოიძებნება (1.33) განტოლების ისეთი u ამონახსნი (სადაც $p_1 = p_+$) რომელსაც მინიმუმ ოთხი ნული გააჩნია (მათი ჯერადობების ჩათვლით) $[a,\, b]$ შუალედზე და თუ $a_0 \in [a,\, b[$ არის u ამონახსნის პირველი ნული მაშინ $b_0 := \eta(a_0,\, p_+) \in]a_0,\, b]$. ასეთ შემთხვევაში 1.6 ლემის ძალით (1.33) განტოლებას (სადაც $p_1 = p_+$)

$$u^{(j)}(a_0) = 0, \qquad u^{(j)}(b_0) = 0 \; (j = 0, 1)$$

სასაზღვრო პირობებში გააჩნია $]a_0,\, b_0[$ შუალედზე დადებითი u ამონახსნი და $p_1(t) = p(t)$ თუ $t \in [a_0,\, b_0]$. ახლა თუ $\omega_0 := b_0 - a_0$ და $v, h : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ ფუნქციებს შემოვიღებთ

$$v(t) := u(t\omega_0 + a_0), \qquad h(t) := \omega_0^4 p(t\omega_0 + a_0) \qquad \text{თუ} \quad t \in [0,\, 1] \tag{1.52}$$

ტოლობებით, მაშინ v იქნება

$$v^{(4)}(t) = h(t)v(t),$$
$$v^{(j)}(0) = 0, \qquad v^{(j)}(1) = 0 \; (j = 0, 1)$$

ამოცანის $]0,\, 1[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი და სამართლიანი იქნება წარმოდგენა

$$v(t) = \int_0^1 G(t,\, s)h(s)v(s)ds \qquad \text{თუ} \quad t \in [0,\, 1], \tag{1.53}$$

სადაც

$$G(t, s) = \frac{1}{6}\begin{cases} (1-t)^2 s^2 (3t - s - 2st) & \text{თუ } \; 0 \le s \le t \le 1 \\ (1-s)^2 t^2 (3s - t - 2st) & \text{თუ } \; 0 \le t < s \le 1 \end{cases}$$

არის

$$u^{(4)}(t) = 0,$$
$$u^{(j)}(0) = 0, \qquad u^{(j)}(1) = 0 \; (j = 0, 1)$$

ამოცანის გრინის ფუნქცია. აგრეთვე არ არის ძნელი საჩვენებელი შემდეგი შეფასებების სამართლიანობა

$$0 \le G(t,\, s) \le \frac{1}{192}, \qquad \int_0^1 G(t,\, s)ds = \frac{t^2(1-t)^2}{24} \le \frac{1}{384} \qquad \text{თუ} \quad s, t \in [0,\, 1].$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ v ფუნქციის დადებითობიდან გამომდინარეობს ისეთი $t_0 \in]0,\, 1[$ წერტილის არსებობა, რომ $v(t_0) = ||v||_C$ და მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$\frac{1}{||v||_C}\int_0^1 G(t_0,\, s)h(s)v(s)ds = 1, \tag{1.54}$$

საიდანაც ნებისმიერი $M \in \mathbb{R}_0^+$ მუდმივისათვის მივიღებთ

$$1 < \int_0^1 G(t_0,\, s)h(s)ds = M\omega_0^4 \int_0^1 G(t_0,\, s)ds + \int_0^1 G(t_0,\, s)[h(s) - M\omega_0^4]ds \le$$
$$M\frac{(b-a)^4}{384} + \frac{(b-a)^3\omega_0}{192}\int_0^1 [p(s\omega_0 + a_0) - M]_+ ds =$$
$$M\frac{(b-a)^4}{384} + \frac{(b-a)^3}{192}\int_a^b [p(t) - M]_+ dt,$$

შეფასებას, რომელიც ეწინააღმდეგება (1.11) უტოლობას. ამდენად ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე. $\square$

1.3 თეორემის დამტკიცება. $p \equiv 0$ შემთხვევაში ჩვენი თეორემის სამართლიანობა ტრივიალურია, ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $p \preccurlyeq 0$.

საკამარისობა. (1.12) პირობიდან 1.3 ლემის ძალით (სადაც $p_1 = p_{*-}$, $p_2 = p_-$) გამომდინარეობს უტოლობა

$$\eta(a,\,p_-) \geq \eta(a,\,p_{*-}),$$

სადაც $p_* \in D_-(I)$ ჩართვიდან 1.8 ლემის ძალით $\eta(a,\,p_{*-}) = b$, და ამდენად სამართლიანია შესაფება

$$\eta(a,\,p_-) \geq b. \tag{1.55}$$

მეორე მხრივ $p_* \in D_-(I)$ ჩართვიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} u^{(4)}(t) &= p_{*-}(t)u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \\ u^{(j)}(a) &= 0\,(j = 0,1,2), \qquad u(b) = 0, \end{aligned} \tag{1.56}$$

ამოცანას გააჩნია $]a,\,b[$ შუალედზე დადებითი u ამონახსნი.

ახლა დავუშვათ, რომ $\eta(a,\,p_-) = b$, მაშინ 1.7 ლემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} v^{(4)}(t) &= p_-(t)v(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \\ v(a) &= 0, \qquad v^{(j)}(b) = 0\,(j = 0,1,2), \end{aligned} \tag{1.57}$$

ამოცანას გააჩნია $]a,\,b[$ შუალედზე დადებითი v ამონახსნი. მაშინ თუ (1.56) და (1.57) განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად v და $-u$ ფუნქციებზე, მიღებული ტოლობების ჯამს ვაინტეგრებთ a-დან b-მდე და გავითვალისწინებთ (1.34) განსაზღვრებას, მივიღებთ

$$\int_a^b u^{(4)}(s)v(s)ds - \int_a^b v^{(4)}(s)u(s)ds = \int_a^b [p_*(s) - p(s)]u(s)v(s)ds.$$

თუ უკანასკნელი გამოსახულების მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალებისთვის გამოვიყენებთ ნაწილობით ინტეგრების ფორმულას შეუღლებული (1.56) და (1.57) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\int_a^b [p_*(s) - p(s)]u(s)v(s)ds = 0,$$

რაც u და v ფუნქციების $]a,\,b[$ შუალედზე დადებითობის ძალით ეწინააღმდეგება (1.7) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება მცდარი იყო, და ამდენად (1.55) უტოლობის ძალით

$$\eta(a,\,p_-) > b. \tag{1.58}$$

ახლა დავუშვათ, რომ (1.1) განტოლება რხევადია I შუალედზე, ანუ მას გააჩნია ისეთი u ამონახსნი, რომელსაც ჯერადობების ჩათვლით ოთხი ნული მაინც აქვს I შუალედში. მაშინ თუ $t_0 \in [a,\,b[$ არის u ამონახსნის პირველი ნული, ცხადია რომ $\eta(t_0,\,p_-) \in]t_0,\,b]$, და ასეთ შემთხვევაში (1.58) უტოლობის თანახმად

$$\eta(t_0,\,p_-) < \eta(a,\,p_-).$$

მაშინ $t_0 \neq a$, და 1.2 ლემიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$\eta(t_0,\,p_-) > \eta(a,\,p_-),$$

რომელიც წინა უტოლობას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება იყო მცდარი და ამდენად (1.1) განტოლება არარხევადი ყოფილა I შუალედზე.

აუცილებლობა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ 1.1 დებულების თანახმად (1.6), (1.3_3) ამოცანას გააჩნია დადებითი პირველი საკუთარი რიცხვი λ_1, და 1.8 ლემიდან გამომდინარეობს, რომ $p_* := \lambda_1^4 p \in D_-(I)$ და

$$\eta(a,\, \lambda_1^4 p_-) = b. \tag{1.59}$$

ახლა დავუშვათ, რომ (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე, მაშინ $\lambda_1 \neq 1$ და $\eta(a,\, p_-) > b$. დავუშვათ $\lambda_1 < 1$. მაშინ $\lambda_1^4 p_- \not\succcurlyeq p_-$ და ამიტომ 1.3 ლემიდან მივიღებთ

$$\eta(a,\, \lambda_1^4 p_-) \geq \eta(a,\, p_-) > b,$$

რაც ეწინააღმდეგება (1.59) ტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობიდან გამომდინარეობს, რომ $\lambda_1 > 1$, და ამდენად სრულდება (1.12) უტოლობა, სადაც $p_* \in D_-(I)$. $\square$

1.3 შედეგის დამტკიცება. **საკმარისობა.** ვთქვათ $\lambda_0 > 1$, მაშინ $\lambda_0^4 p \preccurlyeq p$, სადაც 1.8 ლემის თანახმად $\lambda_0^4 p \in D_-(I)$, და მაშინ 1.3 თეორემის ძალით (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

აუცილებლობა. სიტყვასიტყვით იმეორებს 1.3 თეორემის აუცილებლობის დამტკიცებას. $\square$

1.4 თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ, რომ (1.1) განტოლება რხევადია I შუალედზე. მაშინ მოიძებნება (1.33) განტოლების ისეთი u ამონახსნი (სადაც $p_1 = p_-$), რომელსაც მინიმუმ ოთხი ნული გააჩნია (ჯერადობების ჩათვლით) I შუალედზე და თუ $a_0 \in [a,\, b[$ არის u ამონახსნის პირველი ნული, მაშინ $b_0 := \eta(a_0,\, p_1) \in]a_0,\, b]$.

მაშინ 1.7 ლემის ძალით (1.33) განტოლებას (სადაც $p_1 = p_-$)

$$u^{(j)}(a_0) = 0 \; (j = 0, 1, 2), \qquad u(b_0) = 0,$$

სასაზღვრო პირობებში გააჩნია $]a_0,\, b_0[$, შუალედზე დადებითი u ამონახსნი და $p_1(t) = p(t)$ თუ $t \in [a_0,\, b_0]$. ახლა თუ $\omega_0 := b_0 - a_0$, და $v, h : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ ფუნქციებს შემოვიღებთ (1.52) ტოლობებით, მაშინ v იქნება

$$v^{(4)}(t) = h(t)v(t),$$
$$v^{(j)}(0) = 0 \, (j = 0, 1, 2), \qquad v(1) = 0$$

ამოცანის $]0,\, 1[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი და სამართლიანი იქნება წარმოდგენა (1.53) სადაც

$$G(t,s) = -\frac{1}{6} \begin{cases} t^3(1-s)^3 - (t-s)^3 & \text{თუ} \;\; 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^3(1-s)^3 & \text{თუ} \;\; 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases}$$

არის

$$u^{(4)}(t) = 0,$$
$$u^{(j)}(0) = 0 \; (j = 0, 1, 2), \qquad u(1) = 0$$

ამოცანის გრინის ფუნქცია. აგრეთვე არ არის ძნელი საჩვენებელი შემდეგი შეფასებების სამართლიანობა

$$-\frac{1}{110} < G(t,\, s) \leq 0, \qquad \int_0^1 |G(t,\, s)|ds = \frac{t^3(1-t)}{24} \leq \frac{9}{2048} \qquad \text{თუ} \quad s, t \in [0,\, 1].$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ v ფუნქციის დადებითობიდან გამომდინარეობს ისეთი $t_0 \in]0,\, 1[$ წერტილის არსებობა, რომ $v(t_0) = ||v||_C$ და ამდენად შესრულდება (1.54) ტოლობა. (1.54) ტოლობიდან კი ნებისმიერი $M \in R_0^+$ მუდმივისთვის მივიღებთ

$$1 < \int_0^1 |G(t_0,\, s)|(-h(s))ds = M\omega_0^4 \int_0^1 |G(t_0,\, s)|ds + \int_0^1 |G(t_0,\, s)|[-h(s) - M\omega_0^4]ds \leq$$

$$M\frac{9(b-a)^4}{2048} + \frac{(b-a)^3\omega_0}{110}\int_0^1 [p(s\omega_0 + a_0) + M]_- ds =$$

$$M\frac{9(b-a)^4}{2048} + \frac{(b-a)^3}{110}\int_a^b [p(t) + M]_- dt,$$

შეფასებას, რომელიც ეწინააღმდეგება (1.16) უტოლობას. ამდენად ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე. $\square$

1.5 თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია I შუალედში მინიმუმ ოთხი ნულის მქონე (მათი ჯერადობების ჩათვლით) ამონახსნი u. თუ $a_0 \in [a,\, b[$ არის მისი პირველი ნული მაშინ ცხადია, რომ $b_0 := \eta(a_0,\, p) \in]a_0,\, b]$. ამდენად 1.6 ლემის ძალით მოიძებნება $k \in \{1,\, 2,\, 3\}$ ისეთი, რომ

$$u^{(4)}(t) = [p(t)]_+ u(t) - [p(t)]_- u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in [a_0,\, b_0], \tag{1.60}$$

$$u^{(j_1-1)}(a_0) = 0 \; (j_1 = 1, \dots, k), \qquad u^{(j_2-1)}(b_0) = 0 \; (j_2 = 1, \dots, 4-k), \tag{1.61_k}$$

ამოცანას ექნება $I_0 :=]a_0,\, b_0[$ შუალედზე დადებითი u ამონახსნი.

აგრეთვე (1.17) პირობიდან 1.1 და 1.3 თეორემების ძალით მივიღებთ, რომ შესაბამისად განტოლებები

$$u^{(4)}(t) = [p(t)]_+ u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{1.62}$$

$$u^{(4)}(t) = -[p(t)]_- u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{1.63}$$

არარხევადები არიან I შუალედზე და მაშინ მითუმეტეს $[a_0,\, b_0]$ შუალედზეც. მეორე მხრივ [33, ა. ლევინი] ნაშრომში დამტკიცებული 4.2 ლემის თანახმად (იხ. აგრეთვე [9, ლემა 2.6]) (1.62), (1.61_k) და (1.63), (1.61_k) ამოცანების გრინის ფუნქციები G_{1k} და შესაბამისად G_{2k} აკმაყოფილებს პირობებს

$$(-1)^k G_{1k}(t,\, s) \geq 0, \quad (-1)^k G_{2k}(t,\, s) \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad t,\, s \in [a_0,\, b_0].$$

მაშინ (1.60), (1.61_k) ამოცანის u ამონახსნისთვის სამართლიანია წარმოდგენები

$$u(t) = (-1)^{k+1}\int_{a_0}^{b_0} |G_{1k}(t,\, s)|[p(s)]_- u(s)ds,$$

$$u(t) = (-1)^k \int_{a_0}^{b_0} |G_{2k}(t,\, s)|[p(s)]_+ u(s) ds.$$

აქედან $[p]_\pm$ ფუნქციების არაუარყოფითობის და u ფუნქციის I_0 შუალედში დადებითობის საფუძველზე მივიღებთ

$$(-1)^{k+1} u(t) = \int_{a_0}^{b_0} |G_{1k}(t,\, s)[p(s)]_- u(s)| ds > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I_0,$$

$$(-1)^{k} u(t) = \int_{a_0}^{b_0} |G_{2k}(t,\, s)[p(s)]_+ u(s)| ds > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I_0,$$

რაც წინააღმდეგობაა. ამდენად ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და (1.1) განტოლება არარხევადია I შუალედზე. □

1.7 შედეგის დამტკიცება. 1.2 თეორემის ძალით (1.21) უტოლობებიდან მეორე მოგვცემს (1.62) განტოლების არარხევადობას, ამიტომ 1.1 თეორემის ძალით მოიძებნება $p^* \in D_+(I)$ ფუნქცია ისეთი რომ შესრულდება

$$[p]_+ \preccurlyeq p^*$$

უტოლობა.

ანალოგიურად 1.4 თეორემის ძალით (1.21) უტოლობებიდან პირველი მოგვცემს (1.63) განტოლების არარხევადობას, ამიტომ 1.3 თეორემის ძალით მოიძებნება $p_* \in D_-(I)$ ფუნქცია ისეთი რომ, შესრულდება

$$p_* \preccurlyeq -[p]_-$$

უტოლობა. ორი უკანასკნელი უტოლობიდან კი 1.5 თეორემის ძალით გამომდინარეობს ჩვენი შედეგის სამართლიანობა. □

1.7 თეორემის დამტკიცება. $\alpha_p < \beta_p$ პირობის ძალით არსებობს $\mu \in]\alpha_p,\ \beta_p[$. მაშინ (1.22) უტოლობებიდან გამომდინარეობს ისეთი $p_* \in D_-(I),\ p^* \in D_+(I)$, ფუნქციების არსებობა რომ

$$\mu < \operatorname*{ess\,inf}_{t \in I} \{p(t) - p_*(t)\} \qquad \text{და} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \{p(t) - p^*(t)\} < \mu,$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$p_*(t) < p(t) - \mu < p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან კი 1.5 თეორემის ძალით გამომდინარეობს (1.2) განტოლების I შუალედზე არარხევადობა. □

1.8 შედეგის დამტკიცება. დავუშვათ $p(t) \equiv \gamma$ და სრულდება (1.24) პირობა, სადაც 1.1 შენიშვნის ძალით გვაქვს

$$\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \in D_+(I) \qquad \text{და} \qquad -\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \in D_-(I).$$

მაშინ 1.2 შენიშვნის თანახმად, როგორიც არ უნდა იყოს $p^* \in D_+(I)$, თუ $p^* \neq \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$, მოიძებნება ისეთი $I_{p^*} \subset I$, რომ

$$p^*(t) < \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \qquad \text{თუ} \quad t \in I_{p^*},$$

და ამდენად

$$\gamma - \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \left\{ \gamma - \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \right\} < \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \{ \gamma - p^*(t) \},$$

საიდანაც ცხადია, რომ $\alpha_p = \gamma - \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $\beta_p = \gamma + \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$.

აგრეთვე იქიდან რომ $\gamma - \alpha_p = \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$ და $\gamma - \beta_p = -\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$ ცხადია, რომ (1.2) განტოლება რხევადია I შუალედზე თუ $p \equiv \gamma$ და $\mu = \alpha_p$, $\mu = \beta_p$. $\square$

1.9 შედეგის დამტკიცება. $p \in D_+(I)$ პირობიდან 1.2 შენიშვნის ძალით გამომდინარეობს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $p^* \in D_+(I)$, თუ $p^* \neq p$, მოიძებნება ისეთი $I_{p^*} \subset I$, რომ

$$p^*(t) < p(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I_{p^*},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$0 < \operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} \{ p(t) - p^*(t) \}.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან ცხადია, რომ $\alpha_p = 0$, და ამიტომ 1.7 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\mu \in]0, \beta_p[$, მაშინ (1.2) განტოლება არარხევადია I შუალედზე.

თეორემის სრულად დასამტკიცებლად დაგვრჩა ვაჩვენოთ (1.25) შეფასების სამართლიანობა. მართლაც, ნებისმიერი $p \in D_+(I)$ ფუნქციისთვის გვაქვს $p \succcurlyeq 0$, და ამგვარად

$$-\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \preccurlyeq -\Big[p(t) - \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \Big]_- < p(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან 1.5 თეორემის ძალით გამომდინარეობს, რომ განტოლება

$$u^{(4)}(t) = h(t) u(t), \tag{1.64}$$

სადაც $h(t) = -\Big[p(t) - \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \Big]_-$, არარხევადია I შუალედზე. მაშინ 1.9 ლემის ძალით მოიძებნება $\varepsilon_0 > 0$ ისეთი, რომ

$$h(t) = p_{\varepsilon_0}(t) := -\Big[p(t) - \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} \Big]_- - \varepsilon_0$$

კოეფიციენტისთვისაც (1.64) განტოლება იქნება I შუალედზე არარხევადი. აქედან კი 1.3 თეორემის ძალით გამომდინარეობს ისეთი $p_* \in D_-(I)$ ფუნქციის არსებობა რომ $p_{\varepsilon_0} \succcurlyeq p_*$. ახლა შემოვიღოთ $\delta(t) := p_{\varepsilon_0}(t) - p_*(t)$, მაშინ $\delta(t) \succcurlyeq 0$ და β_p რიცხვის განსაზღვრების ძალით მივიღებთ

$$\beta_p \geq \operatorname*{ess\,inf}_{t\in I}\{p(t) - p_*(t)\} = \operatorname*{ess\,inf}_{t\in I}\Big\{p(t) + \Big[p(t) - \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}\Big]_- + \varepsilon_0 + \delta(t)\Big\} \geq$$

$$\geq \operatorname*{ess\,inf}_{t\in I}\Big\{p(t) - \Big(p(t) - \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}\Big) + \varepsilon_0 + \delta(t)\Big\} \geq \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} + \varepsilon_0 > \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}.$$

□

1.10 შედეგის დამტკიცება. ანალოგიურია 1.9 შედეგის დამტკიცების, იმ განსხვავებით, რომ $p_{\varepsilon_0}(t) := \Big[p(t) + \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}\Big]_+ + \varepsilon_0$, და ნაცვლად 1.3 თეორემისა ვიყენებთ 1.1 თეორემას.

□

სანამ 1.8 და 1.9 თეორემების დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ განვიხილოთ სამი დებულება რომლებსაც ეს დამტკიცებები ეყრდნობა.

***დ ე ბ უ ლ ე ბ ა* 1.2.** ([8, თეორემა 5]) დავუშვათ $p \in L(I;\mathbb{R})$, და

$$\begin{gathered} u^{(4)}(t) = [p(t)]_+ u(t), \\ u^{(j-1)}(a) = 0, \qquad u^{(j-1)}(b) = 0 \ (j = 1, 2) \end{gathered} \tag{1.65$_1$}$$

ამოცანის გრინის ფუნქცია G არის სავსებით დადებითი ბირთვი (Totally positive kernel). მაშინ (1.4), (1.3$_2$) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია.

***დ ე ბ უ ლ ე ბ ა* 1.3.** ([8, თეორემა 4]) დავუშვათ $p \in L(I;\mathbb{R})$, და

$$\begin{gathered} u^{(4)}(t) = -[p(t)]_- u(t), \\ u^{(j-1)}(a) = 0 \ (j = 1, 2, 3), \qquad u(b) = 0 \end{gathered} \tag{1.65$_2$}$$

ამოცანის გრინის ფუნქცია G ისეთია, რომ $-G$ არის სავსებით დადებითი ბირთვი. მაშინ (1.4), (1.3$_3$) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია.

***დ ე ბ უ ლ ე ბ ა* 1.4.** ([34, განტმახერ-კრეინი]) დავუშვათ ფუნქცია $p \in L(I;\mathbb{R})$ ისეთია, რომ (1.1) განტოლება არარხევადია და G არის $(1.1), (1.3_2)$ $((1.1), (1.3_3))$ ამოცანის გრინის ფუნქცია. მაშინ G $(-G)$ არის სავსებით დადებითი ბირთვი.

1.8 თეორემის დამტკიცება. (1.27) განტოლების არარხევადობიდან 1.1 თეორემის ძალით გამომდინარეობს ისეთი $p^* \in D_+(I)$ ფუნქციის არსებობა რომ შესრულდება უტოლობა

$$[p_0(t)]_+ \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

მაშინ (1.28) პირობიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$[p(t)]_+ \preccurlyeq p^*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,$$

და ამდენად ისევ 1.1 თეორემის ძალით $u^{(4)} = [p]_+ u$ განტოლება იქნება არარხევადი. მაშინ 1.4 დებულების თანახმად (1.65_1) ამოცანის გრინის ფუნქცია იქნება სავსებით დადებითი ბირთვი, ამიტომ ჩვენი თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს 1.2 დებულებიდან. □

1.9 თეორემის დამტკიცება. (1.29) განტოლების არარხევადობიდან 1.3 თეორემის ძალით გამომდინარეობს ისეთი $p_* \in D_-(I)$ ფუნქციის არსებობა რომ შესრულდება უტოლობა

$$-[p_0(t)]_- \not\geq p_*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

მაშინ (1.30) პირობიდან გამომდინარეობს უტოლობა

$$-[p(t)]_- \not\geq p_*(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,$$

და ამდენად ისევ 1.3 თეორემის ძალით $u^{(4)} = -[p]_- u$ განტოლება იქნება არარხევადი. მაშინ 1.4 დებულების თანახმად (1.65_2) ამოცანის გრინის G ფუნქციისთვის $-G$ იქნება სავსებით დადებითი ბირთვი, ამიტომ 1.3 დებულებიდან გამომდინარეობს (1.4), (1.3_3) ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა.

ახლა თუ გავიხსენებთ იმ კარგად ცნობილ ფაქტს, რომ წრფივ ერთგვაროვან ამოცანას და მის შეუღლებულ ამოცანას ერთდროულად გააჩნია ნულოვანი ამონახსნები, და გავითვალისწინებთ, რომ (1.1), (1.3_1) არის (1.1), (1.3_3) ამოცანის შეუღლებული ამოცანა, დავრწმუნდებით (1.4), (1.3_1) ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობაშიც. □

1.10 თეორემის დამტკიცება. ა. განვიხილოთ 1.10 ლემაში განსაზღვრული $T[\mu]$ ოპერატორი, X_k სიმრავლე, და $\mu_1,\ \lambda_*,\ \lambda_1^*, \lambda_3^*,\ \lambda^*$ რიცხვები. $p \in D_+(I) \cap C(I;\mathbb{R})$ ჩართვის და 1.11 შედეგის ძალით განტოლება

$$T\Big[\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda\Big]u(t) = 0, \tag{1.66}$$

რომელიც შეიძლება გადაიწეროს

$$u^{(4)}(t) = \Big(p(t) - \Big[\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda\Big]\Big)u(t)$$

სახით, არარხევადია I შუალედზე თუ $\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda \in]0,\ \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}]$, ე.ი., როდესაც $\lambda \in [0,\ \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}[$, და $D_+(I)$ სიმრავლის განსაზღვრების ძალით, თუ $\lambda = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$ მაშინ $(1.66), (1.3_2)$ ამოცანას აქვს $]a,\ b[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი. ამიტომ $\lambda = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$ არის $(1.66), (1.3_2)$ ამოცანის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ $\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$ პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვია $T[\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}]$ ოპერატორის X_2 სიმრავლეზე და განტოლება $T[\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}]u = 0$ არარხევადია I შუალედზე. ამიტომ $\mu_1 = \lambda_* = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$.

მეორე მხრივ, ის ფაქტი რომ λ_k^* $(k = 1, 3)$ არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი $T[\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}]$ ოპერატორის X_k სიმრავლეში, ნიშნავს რომ როდესაც $\lambda \in]\lambda_k^*,\ 0[$, ე.ი., როდესაც

$$\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} < \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda < \mu_k^* \ \ \Big(\mu_k^* := \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda_k^*\Big), \tag{1.67}$$

მაშინ განტოლება (1.66) არარხევადია, და თუ $\lambda = \lambda_k^*$, (1.66), (0.2_k) ამოცანას აქვს $]a,\, b[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი. მეტიც, 1.11 შედეგის ძალით (1.66) განტოლება არარხევადია აგრეთვე თუ

$$0 < \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda \le \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}. \tag{1.68}$$

ამდენად (1.67) და (1.68) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ (1.66) განტოლება არარხევადია I შუალედზე თუ

$$\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda \in]0,\ \mu_k^*[\,,$$

და (1.66), (0.2_k) ამოცანას აქვს $]a,\, b[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი თუ $\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda$ უდრის μ_k^* რიცხვს. სხვა სიტყვებით, μ_k^* არის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი (1.2), (0.2_k) ამოცანის და

$$\lambda^* = \max\{\lambda_1^*,\, \lambda_3^*\} = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \min\{\mu_1^*,\, \mu_3^*\} = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \mu_p.$$

მაშინ 1.10 ლემიდან როდესაც $\mu_1 = \lambda_* = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$ და $\lambda^* = \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \mu_p$, გამომდინარეობს რომ $T[\mu]$ შებრუნებულად დადებითი ოპერატორია X_2 სიმრავლეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\mu \in]0,\, \mu_p]$, რაც (1.2), (1.3_2) ამოცანის გრინის ფუნქციის არაუარყოფითობის ეკვივალენტურია (იხილეთ [9, თეორემა 2.10]).

ბ. რადგან μ_p ტოლია ერთ-ერთის $\mu_k^*\, (k = 1, 3)$ რიცხვებიდან ანუ (1.2), (0.2_k) ამოცანებიდან ერთ-ერთის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვის, გამოდის რომ თუ $\mu = \mu_p$ მაშინ (1.2) განტოლება რხევადია. ამიტომ 1.9 შედეგის ძალით $\mu_p \notin]0,\ \beta_p[\,$. ე.ი. $\mu_p \ge \beta_p$ და მაშინ (1.25) უტოლობის ძალით $\mu_p \ge \beta_p > \frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4}$. □

1.11 თეორემის დამტკიცება. ვთქვათ $T[\mu]$ ოპერატორი, X_k სიმრავლე და $\mu_1,\, \lambda_*,\, \lambda_1^*,\, \lambda_3^*,\, \lambda^*$, რიცხვები განსაზღვრულია როგორც 1.10 ლემაში. $p \in D_-(I) \cap C(I; \mathbb{R})$, ჩართვის და 1.10 შედეგის ძალით, განტოლება

$$T[-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda]u(t) = 0 \tag{1.69}$$

რომელიც შეიძლება გადაიწეროს

$$u^{(4)}(t) = \Big(p(t) - \Big[-\frac{\lambda_2^4}{(b-a)^4} - \lambda\Big]\Big)u(t)$$

სახით, არარხევადია თუ $-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda \in [-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}, 0[\,$, ე.ი. თუ $\lambda \in]-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}, 0]$, და $D_-(I)$ სიმრავლის განსაზღვრების ძალით, თუ $\lambda = -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$ მაშინ (1.69), (1.3_3) ამოცანას აქვს $]a,\, b[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი. შესაბამისად $\lambda = -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$ არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი (1.69), (1.3_3) ამოცანის, და მაშინ 1.7 ლემის ძალით ის არის ასევე უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი (1.69), (1.3_1) ამოცანის. სხვა სიტყვებით $-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$ არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი $T[-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}]$ ოპერატორის X_1 და X_3

სიმრავლეებზე, და განტოლება $T[-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}]u = 0$ არარხევადია I შუალედზე. ამგვარად $\mu_1 = \lambda_1^* = \lambda_3^* = \lambda^* = -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$.

მეორე მხრივ, ის ფაქტი რომ λ_* არის პირველი დადებითი საკუთარი რიცხვი $T[-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}]$ ოპერატორის X_2 სიმრავლეზე, ნიშნავს რომ როდესაც $\lambda \in]0,\ \lambda_*[$, ე.ი., როდესაც

$$\mu_p < -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda < -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \quad \Big(\mu_p := -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda_*\Big),$$

მაშინ (1.69) განტოლება არარხევადია, და თუ $\lambda = \lambda_*$, მაშინ (1.69), (1.3$_2$) ამოცანას გააჩნია $]a,\ b[$ შუალედზე დადებით ამონახსნი. მეტიც, 1.11 შედეგის ძალით (1.69) განტოლება არარხევადია აგრეთვე თუ

$$-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \leq -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda < 0.$$

ამიტომ (1.69) განტოლება არარხევადია თუ

$$-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda \in]\mu_p,\ 0[\,,$$

და (1.69), (1.3$_2$) ამოცანას გააჩნია $]a,\ b[$ შუალედზე დადებითი ამონახსნი იმ შემთხვევაში თუ $-\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \lambda$ უდრის μ_p რიცხვს. სხვა სიტყვებით, μ_p არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი (1.2), (1.3$_2$) ამოცანის.

მაშინ 1.10 ლემიდან, როდესაც $\mu_1 = \lambda^* = -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$ და $\lambda_* = -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} - \mu_p$, გამომდინარეობს რომ $T[\mu]$ ოპერატორი შებრუნებულად დადებითია X_2 სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $\mu \in]\mu_p,\ 0]$, რაც არის (1.2), (1.3$_2$) ამოცანის გრინის ფუნქციის არაუარყოფითობის ეკვივალენტური (იხილეთ [9, თეორემა 2.10]).

ბ. რადგან μ_p არის უდიდესი უარყოფითი საკუთარი რიცხვი (1.2), (1.3$_2$) ამოცანის, თუ $\mu = \mu_p$ მაშინ (1.2) განტოლება რხევადია. ამიტომ 1.10 შედეგის ძალით $\mu_p \notin]\alpha_p,\ 0[$. ე.ი. $\mu_p \leq \alpha_p$ და მაშინ (1.26) უტოლობის ძალით $\mu_p \leq \alpha_p < -\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4}$. □

1.12 და 1.13 თეორემების დამტკიცება. ანალოგიურია 1.10 და 1.11 თეორემების დამტკიცების, იმ განსხვავებით რომ ნაცვლად 1.10 ლემისა გამოვიყენებთ 1.11 ლემას, და იმ ფაქტს რომ $T[\mu]$ ოპერატორის შებრუნებულად უარყოფითობა X_1 სიმრავლეზე ეკვივალენტურია (1.2), (1.3$_3$) ამოცანის გრინის ფუნქციის არადადებითობის (იხილეთ [9, თეორემა 2.10]). □

თ ა ვ ი II. არაწრფივი $(k, n-k)$ ამოცანების ამოხსნადობა და ცალსახად ამოხსნადობა რეზონანსულ შემთხვევაში

2.1 ძირითადი შედეგები

დავუშვათ $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n-1$, და სასრულ $I := [a, b]$ შუალედზე განვიხილოთ შემდეგი სახის n-ური რიგის არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$u^{(n)}(t) = p(t)u(t) + f(t, u(t)) + h(t), \tag{2.1}$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით

$$u^{(j_1-1)}(a) = 0\,(j_1 = 1, \dots, k), \qquad u^{(j_2-1)}(b) = 0\,(j_2 = 1, \dots, n-k), \tag{2.2$_k$}$$

სადაც $f \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R}),\ h, p \in L(I; \mathbb{R})$ და

$$(-1)^{n-k} p(t) \succcurlyeq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{2.3$_k$}$$

(2.1), (2.2_k) ამოცანასთან ერთად I შუალედზე განვიხილოთ შემდეგი წრფივი ერთგვაროვანი და მისი შეუღლებული ამოცანები

$$w^{(n)}(t) = p(t)w(t), \tag{2.4}$$

$$w^{(j_1-1)}(a) = 0\,(j_1 = 1, \dots, k), \qquad w^{(j_2-1)}(b) = 0\,(j_2 = 1, \dots, n-k), \tag{2.5$_k$}$$

და

$$w^{(n)}(t) = (-1)^n p(t)w(t), \tag{2.4*}$$

$$w^{(j_1-1)}(a) = 0\,(j_1 = 1, \dots, n-k), \qquad w^{(j_2-1)}(b) = 0\,(j_2 = 1, \dots, k). \tag{2.5$_{n-k}$}$$

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.1.** როგორც 1.1 დებულებიდან ვხედავთ (იხ. გვ. 25), ნიშანმუდმივი p კოეფიციენტის შემთხვევაში, (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვან ამონახსნებს მხოლოდ მარტივი ნულები შეიძლება გააჩნდეს. ამდენად (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვანი w ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ნიშანმუდმივი, თუ w ამონახსნს არ გააჩნია ნულები $]a, b[$ შუალედში.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.2.** როდესაც

$$(-1)^{n-k} p(t) \le 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I,$$

მაშინ (2.4), (2.5_k) ამოცანას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი გააჩნია (იხ. [28, ლემები 1.4, 1.5]). ამდენად (2.1), (2.2_k) ამოცანაზე საუბარს რეზონანსულ შემთხვევაში აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ თუ დაცულია (2.3_k) პირობა.

აქვე უნდა ითქვას, რომ ქვევით მოყვანილი თეორემები $(-1)^{n-k}p \le 0$ შემთხვევაშიც სამართლიანი იქნება, თუმცა ასეთ შემთხვევაში ამ თეორემებში შემავალი ყველა პირობა, გარდა

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b f^*(s, \rho)ds = 0$$

პირობისა სრულიად ზედმეტი აღმოჩნდება.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.3.** როგორც 1.1 დებულებიდან ვხედავთ, ნიშანმუდმივი p კოეფიციენტის შემთხვევაში, (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვან ამონახსნთა სივრცე ერთგანზომილებიანია, ანუ თუ w_1 და w არის ამ ამოცანის არანულოვანი ამონახსნები, მაშინ

$$w_1(t) = \beta w(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{2.6}$$

სადაც $\beta = -||w_1||_C/||w||_C$ ან $\beta = ||w_1||_C/||w||_C$.

უკანასკნელი შენიშვნიდან ცხადია, რომ დაფიქსირებული p ფუნქციისათვის (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვან ამონახსნებს ერთიდაიგივე ნულები ექნება I შუალედში და ამდენად, ამ ამოცანის არანულოვანი ამონახსნების ყველა შესაძლებელი ნულების სიმრავლის, აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე როგორც $N_{p,n}$, დადგენა შეიძლება ნებისმიერი ერთი არანულოვანი w ამონახსნის მიხედვით. ამდენად კორექტული იქნება განსაზღვრება

$$N_{p,n} \overset{def}{\equiv} \{t \in]a, b[\,:\, w(t) = 0,\ w \not\equiv 0\}. \tag{2.7}$$

2.1.1 $(k, n-k)$ *ამოცანები, ზოგადი შემთხვევა*

განვიხილოთ (2.1), (2.2_k) ამოცანა რეზონანსულ შემთხვევაში ნებისმიერი $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n-1$ რიცხვებისათვის. ამ ზოგად შემთხვევაში ლანდესმან - ლაზერის ტიპის ამოხსნადობის თეორემა შეგვიძლია დავამტკიცოთ მხოლოდ მაშინ თუ (2.4^*), (2.5_{n-k}) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი w ნიშანმუდმივია, რაც 2.1 შენიშვნის თანახმად იმას ნიშნავს, რომ w ამონახსნს არ გააჩნია ნულები ღია $]a, b[$ შუალედში. ანუ დავუშვათ, რომ

$$N_{p,n} = \emptyset,$$

რაც ისევ 1.1 დებულების ძალით იმას ნიშნავს, რომ რიცხვი 1 არის (2.4^*), (2.5_{n-k}) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი.

***თ ე ო რ ე მ ა* 2.1.** დავუშვათ $i \in \{0, 1\}$, $r > 0$, $N_{p,n} = \emptyset$, და ფუნქციები $f^+, f^- \in L(I; \mathbb{R}_0^+)$ ისეთია, რომ სრულდება პირობები

$$\begin{aligned} (-1)^i f(t,x) \le -f^-(t) \qquad & \text{თუ} \quad x \le -r, \quad t \in I, \\ f^+(t) \le (-1)^i f(t,x) \qquad & \text{თუ} \quad x \ge r, \quad t \in I, \end{aligned} \tag{2.8_i}$$

და

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b f^*(s, \rho) ds = 0. \tag{2.9}$$

მეტიც, დავუშვათ w არის (2.4^*), (2.5_{n-k}) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი და მოიძებნება $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ

$$\begin{gathered} -\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds + \varepsilon\gamma_r ||w||_C \le (-1)^{i+1} \int_a^b h(s)|w(s)|ds \le \\ \int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r ||w||_C, \end{gathered} \tag{2.10_i}$$

სადაც

$$\gamma_r = \int_a^b f^*(s, r) ds.$$

მაშინ (2.1), (2.2_k) ამოცანა ამოხსნადია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.4. თუ $f \equiv 0$ მაშინ $\gamma_r = 0$, ხოლო (2.8_i) პირობებიდან ცხადია, რომ $f^+ \equiv f^- \equiv 0$, და მაშინ (2.10_i) პირობა მიიღებს სახეს

$$\int_a^b h(s)w(s)ds = 0.$$

ამდენად $f \equiv 0$ შემთხვევაში 2.1 თეორემა გადაიქცევა ფრედჰოლმის თეორემის თავისუფალი წევრისა და ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნის ორთოგონალობის პირობად.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.5. თუ $\widetilde{f}(t) = \min\{f^+(t),\ f^-(t)\}$ მაშინ

$$\int_a^b \widetilde{f}(s)|w(s)|ds \le \int_a^b f^{\pm}(s)|w(s)|ds,$$

და ამდენად (2.10_i) პირობა შესრულდება თუ

$$\left|\int_a^b h(s)|w(s)|ds\right| \le \int_a^b \widetilde{f}(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C. \tag{2.11}$$

ანუ (2.10_i) შეიძლება ჩავანაცვლოთ უკანასკნელი პირობით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2.6. თუ $f \not\equiv 0$, მაშინ 2.1 თეორემის (2.10_i) პირობა შეიძლება ჩავანაცვლოთ შემდეგი მკაცრი უტოლობით

$$-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds < (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)|w(s)|ds < \int_a^b f^+(s)|w(s)|ds.$$

შ ე დ ე გ ი 2.1. დავუშვათ $i \in \{0,1\}$, $r_0 > 0$, $N_{p,n} = \emptyset$, და სრულდება პირობები

$$(-1)^i f(t,x)\,\mathrm{sgn}\,x \ge 0 \qquad \text{თუ} \quad |x| \ge r_0,\ \ t \in I, \tag{2.12}$$

და (2.9). მეტიც, დავუშვათ მოიძებნება ისეთი დადებითი ზომის $I^+,\ I^- \subset I$ სიმრავლეები, რომ

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}|f(t,\,x)| = +\infty \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I^+,\\ &\lim_{x\to-\infty}|f(t,\,x)| = +\infty \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I^-. \end{aligned} \tag{2.13}$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის (2.1), (2.2_k) ამოცანა ამოხსნადია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. 2.1 შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ განტოლება

$$u^{(n)}(t) = (-1)^{n-k}\lambda_{n,k}u(t) + f(x)|u(t)|^{\alpha}\,\mathrm{sgn}\,u(t) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad 0 \le t \le 1,$$

სასაზღვრო (2.2_k) პირობებში (სადაც $a = 0$ და $b = 1$) ამოხსნადია ნებისმიერი $h, f \in L([0,\,1];\mathbb{R})$ ფუნქციებისთვის, თუ $\alpha \in]0,1[$, და $\lambda_{n,k}$ არის

$$\begin{gathered} w^{(n)}(t) = (-1)^{n-k}\lambda w(t),\\ w^{(j_1-1)}(0) = 0\ (j_1 = 1,\dots,k), \qquad w^{(j_2-1)}(1) = 0\ (j_2 = 1,\dots,n-k) \end{gathered} \tag{2.14_k}$$

ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი.

***მ ა გ ა ლ ი თ ი* 2.2.** 2.5 შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ განტოლება

$$u^{(n)}(t) = (-1)^{n-k}\lambda_{n,k}u(t) + \frac{\sigma|u(t)|^\alpha}{1+|u(t)|^\alpha}\operatorname{sgn} u(t) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad 0 \le t \le 1, \tag{2.15}$$

სასაზღვრო (2.2_k) პირობებში (სადაც $a = 0$ და $b = 1$) ამოხსნადია თუ $h \in L([0,\,1];\,\mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას

$$|h(t)| < 1 \quad \text{თუ} \quad 0 \le t \le 1, \qquad \text{ან} \qquad \int_0^1 h(s)w(s)ds = 0,$$

და $\sigma \in \{-1, 1\}$, $\alpha > 0$, და w, $\lambda_{n,k}$ არის (2.14_k) ამოცანის შესაბამისად არანულოვანი ამონახსნი და პირველი საკუთარი რიცხვი.

დავუშვათ $\sigma = 1$, $\mu = 0$, და $||w||_C = 1$ (თუ $\sigma = -1$ მსჯელობა ანალოგიურია). მაშინ ცხადი

$$\Big|\int_0^1 h(s)w(s)ds\Big| \le \int_0^1 |h(s)|\cdot|w(s)|ds < \int_0^1 |w(s)|ds$$

უტოლობის გათვალისწინებით მოიძებნება ისეთი $\varepsilon > 0$ და $\delta \in]0,\,1[$ რიცხვები, რომ

$$\Big|\int_0^1 h(s)w(s)ds\Big| = \delta\int_0^1 |w(s)|ds - \varepsilon.$$

ახლა თუ შევნიშნავთ რომ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\alpha} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|^{\alpha-1}}{1+|x|^\alpha} = 0,$$

ცხადია, ისეთი $r > 0$ მუდმივის არსებობა, რომ შესრულდებიან (2.8_i) და (2.11) პირობები სადაც $f^- = f^+ = \delta$, რადგან $\gamma_r < 1$. აგრეთვე ცხადია (2.9) პირობის სამართლიანობა.

მაშინ 2.5 შენიშვნის გათვალისწინებით (2.1) თეორემიდან გამომდინარეობს (2.15), (2.2_k) ამოცანის ამოხსნადობა.

2.1.2 *$2m$ რიგის განტოლება დირიხლეს სასაზღვრო პირობებში*

იმ შემთხვევაში როდესაც (2.4), (2.5_k) თვითშეუღლებული ამოცანაა, ჩვენ მიერ შემუშავებული მეთოდი საშუალებას იძლევა ვისაუბროთ (2.1), (2.2_k) ამოცანის ამოხსნადობაზე იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ერთგვაროვან წრფივ (2.4), (2.5_k) ამოცანას ნიშანცვლადი არანულოვანი ამონახსნი გააჩნია, ნულების ნებისმიერი რაოდენობით ღია $]a,\,b[$ შუალედში, რაც იმას ნიშნავს რომ რიცხვი 1 შეიძლება იყოს (2.4), (2.5_k) ამოცანის ნებისმიერი რიგის საკუთარი რიცხვი.

სანამ გადავიდოდეთ ძირითადი შედეგების ჩამოყალიბებაზე შევნიშნოთ, (2.4), (2.5_k) ამოცანა თვითშეუღლებულია მხოლოდ მაშინ თუ (2.4) ლუწი რიგის განტოლებაა და (2.5_k) არის დირიხლეს სასაზღვრო პირობები. ამიტომ ჩვენ აქ (2.1), (2.2_k) ამოცანას განვიხილავთ იმ შემთხვევაში როდესაც $n = 2m$ და $k = m$, ანუ ვისაუბრებთ განტოლებაზე

$$u^{(2m)}(t) = p(t)u(t) + f(t,\,u(t)) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{2.16}$$

სასაზღვრო პირობებში

$$u^{(j-1)}(a) = 0, \qquad u^{(j-1)}(b) = 0 \; (j = 1, \ldots, m), \tag{2.17}$$

სადაც $f \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $h \in L(I; \mathbb{R})$ და $p \in L(I; \mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.3_k) პირობას, რომელიც ჩვენ შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$(-1)^m p(t) \succcurlyeq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I.$$

(2.16), (2.17) ამოცანასთან ერთად I შუალედზე განვიხილავთ შემდეგ წრფივ ერთგვაროვან თვითშეუღლებულ ამოცანას

$$w^{(2m)}(t) = p(t)w(t), \tag{2.18}$$

$$w^{(j-1)}(a) = 0, \qquad w^{(j-1)}(b) = 0 \ (j = 1, \dots, m), \tag{2.19}$$

და როგორც უკვე ვთქვით ჩვენ გვაინტერესებს შემთხვევა

$$N_{p,2m} \neq \emptyset,$$

სადაც $N_{p,2m}$ სიმრავლე განისაზღვრება (2.7) ტოლობით. აქვე აღვნიშნოთ, რომ თუ $N_{p,2m} = \emptyset$, ჩვენ მიერ აქ დამტკიცებული თეორემა დაემთხვევა 2.1 თეორემას.

ის ფაქტი, რომ (2.18), (2.19) ამოცანას ჩვენი დაშვების მიხედვით გააჩნია ნულები ღია $]a, b[$ შუალედში, გვაიძულებს ამ ნულებში f ფუნქციას დამატებითი პირობები დავადოთ. ამ პირობების ჩამოსაყალიბებლად შემოვიღოთ გარკვეული აღნიშვნები და განსაზღვრებები.

ნებისმიერი სასრული $A = \{t_1, \dots, t_{k_0}\} \subset]a, b[$ სიმრავლისთვის და

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} \min\{t_1 - a,\ b - t_{k_0},\ t_j - t_{j-1} \ : \ j = 1, \dots, k_0\}$$

რიცხვისთვის შემოვიღოთ

$$U_\alpha(A) = \bigcup_{j=1}^{k_0} V_\alpha(t_j) \quad \text{სადაც} \quad V_\alpha(t_j) =]t_j - \alpha,\ t_j + \alpha[\,. \tag{2.20}$$

ასე შემოღებულ $U_\alpha(A)$ სიმრავლეს ვუწოდებთ A სიმრავლის α რადიუსიან მიდამოს. იმ შემთხვევაში თუ კონტექსტიდან ცხადია რომელი სიმრავლის მიდამოზეა საუბარი, სიმოკლისათვის ვისარგებლებთ აღნიშვნით U_α.

***გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა* 2.1.** ვთქვათ $f \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ და $A = \{t_1, \dots, t_{k_0}\}$ არის $]a, b[$ შუალედის ნებისმიერი სასრული ქვესიმრავლე. მაშინ ვიტყვით, რომ სრულდება ჩართვა

$$f \in E(A),$$

თუ A სიმრავლის ნებისმიერი $U(A)$ მიდამოსა და $r > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\lambda_1 > 0$ რიცხვი, რომ

$$\int_{U(A)\setminus U_\lambda(A)} |f(s,x)|ds - \int_{U_\lambda(A)} |f(s,x)|ds \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad |x| \geq r,\ \lambda \leq \lambda_1. \tag{2.21}$$

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.7.** თუ
$$f(t,x) = f_0(t)g(x),$$
სადაც $f_0 \in L(I;\mathbb{R})$ და $g \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, მაშინ $f \in E(A)$ ნებისმიერი სასრული $A \subset]a,b[$ სიმრავლისთვის. მართლაც
$$\int_{U(A)\setminus U_\lambda(A)} |f(s,x)|ds - \int_{U_\lambda(A)} |f(s,x)|ds =$$
$$|g(x)|\Big(\int_{U(A)\setminus U_\lambda(A)} |f_0(s)|ds - \int_{U_\lambda(A)} |f_0(s)|ds\Big),$$
და ამიტომ ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის ძალით მოიძებნება ისეთი $\lambda_1 > 0$ რიცხვი, რომ თუ $\lambda \le \lambda_1$, მაშინ (2.21) პირობა შესრულდება ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}$ რიცხვისთვის.

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს რომ არსებობს ისეთი $f \in K(I \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ ფუნქციებიც, რომლებისთვისაც მოიძებნება ისეთი $t_1,\dots,t_{k_0} \in]a,b[$ წერტილები, რომ
$$f \notin E(\{t_1,\dots,t_{k_0}\}).$$

***მ ა გ ა ლ ი თ ი* 2.3.** შემოვიღოთ $f \in K([-1,1]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ ფუნქცია შემდეგი წესით:
$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{თუ} \quad t = 0 \\ x & \text{თუ} \quad x \le 1/t,\ 0 < t \le 1 \\ 1/t & \text{თუ} \quad x > 1/t,\ 0 < t \le 1 \end{cases},$$
და
$$f(t,x) = f(-t,x) \qquad \text{თუ} \quad t \in [-1,0[,\ x \in \mathbb{R}.$$
აგრეთვე დავუშვათ რომ $U(\{0\}) =]-1,1[$ და $\lambda_1 \in]0,1[$. მაშინ ნებისმიერი $\lambda \in]0,\lambda_1[$ რიცხვისთვის თუ $x > \frac{1}{\lambda}$ სამართლიანია ტოლობა
$$\int_{U(\{0\})\setminus U_\lambda(\{0\})} |f(s,x)|ds - \int_{U_\lambda(\{0\})} |f(s,x)|ds = 2\Big(\int_\lambda^1 f(s,x)ds - \int_0^\lambda f(s,x)ds\Big) =$$
$$= 2\Big(\int_\lambda^1 s^{-1}ds - \int_0^{1/x} xds - \int_{1/x}^\lambda s^{-1}ds\Big) = 2\Big(\ln\frac{1}{x\lambda^2} - 1\Big),$$
და უკანასკნელი გამოსახულება უარყოფითი იქნება თუ $x > \max\{1/\lambda,\ 1/(e\lambda^2)\}$. ამავე დროს ნებისმიერი წინასწარ შერჩეული $r > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება $\lambda \in]0,\lambda_1[$ ისეთი რომ $\frac{1}{e\lambda^2} > \frac{1}{\lambda} > r$, და ამდენად $f \notin E(\{0\})$.

***თ ე ო რ ე მ ა* 2.2.** დავუშვათ $i \in \{0,1\}$, $r > 0$, და ფუნქციები $f^+, f^- \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$ ისეთია, რომ სრულდება (2.8_i), (2.9) პირობები, სადაც
$$N_{p,2m} \ne \emptyset \qquad \text{და} \qquad f \in E(N_{p,2m}). \tag{2.22}$$

მეტიც, დავუშვათ w არის (2.18), (2.19) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი და მოიძებნება $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ

$$
\begin{aligned}
-\int_a^b (f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+)ds + \varepsilon\gamma_r ||w||_C \leq \\
\leq (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds \leq \\
\leq \int_a^b (f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+)ds - \varepsilon\gamma_r ||w||_C,
\end{aligned}
\tag{2.23$_i$}
$$

სადაც $\gamma_r = \int_a^b f^*(s,\, r)ds$. მაშინ (2.16), (2.17) ამოცანა ამოხსნადია.

ცხადია, რომ 2.4 შენიშვნა 2.2 თეორემის შემთხვევაშიც სამართლიანია.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.8.** თუ $\widetilde{f}(t) = \min\{f^+(t), f^-(t)\}$ მაშინ

$$
\int_a^b \widetilde{f}(s)|w(s)|ds \leq \int_a^b (f^{\pm}(s)[w(s)]_- + f^{\pm}(s)[w(s)]_+)ds,
$$

და ამდენად (2.23_i) პირობა შესრულდება თუ

$$
\left|\int_a^b h(s)w(s)ds\right| \leq \int_a^b \widetilde{f}(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r ||w||_C.
$$

ანუ (2.23_i) შეიძლება ჩავანაცვლოთ უკანასკნელი პირობით.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.9.** თუ $f \not\equiv 0$, მაშინ 2.2 თეორემის (2.23_i) პირობა შეიძლება ჩავანაცვლოთ პირობით

$$
\begin{aligned}
-\int_a^b (f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+)ds < \\
(-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds < \\
\int_a^b (f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+)ds.
\end{aligned}
$$

***შ ე დ ე გ ი* 2.2.** დავუშვათ $i \in \{0, 1\}$, $r_0 > 0$, სრულდება

$$
(-1)^i f(t,x)\operatorname{sgn} x \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad |x| \geq r_0, \ \ t \in I, \tag{2.24$_i$}
$$

(2.9), (2.22) პირობები, და მოიძებნება ისეთი $I^+,\, I^- \subset I$ სიმრავლეები, რომ

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} |f(t,\, x)| = +\infty \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I^+, \\
&\lim_{x\to-\infty} |f(t,\, x)| = +\infty \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I^-.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

მეტიც, დავუშვათ (2.18), (2.19) ამოცანის რომელიმე არანულოვანი w ამონახსნისთვის სრულდება უტოლობები

$$
\begin{aligned}
\int_{I^+} [w(s)]_+ ds + \int_{I^-} [w(s)]_- ds \neq 0, \\
\int_{I^+} [w(s)]_- ds + \int_{I^-} [w(s)]_+ ds \neq 0.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I; \mathbb{R})$ ფუნქციისათვის (2.16), (2.17) ამოცანა ამოხსნადია.

***შ ე დ ე გ ი* 2.3.** დავუშვათ $i \in \{0,1\}, r_0 > 0,$ სრულდება (2.9), (2.22), (2.24_i) პირობები და მოიძებნება ისეთი დადებითი ზომის $I_0 \subset I$ სიმრავლე, რომ

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(t,\, x)| = +\infty \quad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I_0. \tag{2.27}$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I;\, \mathbb{R})$ ფუნქციისათვის (2.16), (2.17) ამოცანა ამოხსნადია.

***შ ე დ ე გ ი* 2.4.** დავუშვათ $i \in \{0,1\}$, $r_0 > 0$, სრულდება (2.9), (2.22) პირობები და

$$\begin{aligned} (-1)^i \lim_{x\to+\infty} f(t,\, x) = +\infty \quad &\text{თანაბრად თუ} \quad t \in I, \\ (-1)^i \lim_{x\to-\infty} f(t,\, x) = -\infty \quad &\text{თანაბრად თუ} \quad t \in I. \end{aligned} \tag{2.28}$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I;\, \mathbb{R})$ ფუნქციისათვის (2.16), (2.17) ამოცანა ამოხსნადია.

იმის გათვალისწინებით, რომ (2.28) პირობებიდან გამომდინარეობენ როგორც (2.27) ისე (2.24_i) პირობები, უკანასკნელი შედეგის სამართლიანობა პირდაპირ გამომდინარეობს 2.3 შედეგიდან.

აგრეთვე 2.4 შედეგიდან 2.7 შენიშვნის ძალით გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

***შ ე დ ე გ ი* 2.5.** დავუშვათ $i \in \{0,1\}$, $f(t,x) \equiv f_0(t)g(x)$ სადაც $f_0 \in L(I;\mathbb{R}^+)$, და $g \in C(\mathbb{R};\,\mathbb{R})$, ისეთი ფუნქციებია, რომ

$$\int_a^b f_0(s)ds \neq 0, \qquad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0,$$

და

$$(-1)^i \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \qquad (-1)^i \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I;\, \mathbb{R})$ ფუნქციისათვის (2.16), (2.17) ამოცანა ამოხსნადია.

2.1.3 $(k,\, 4-k)$ *ამოცანები*

როდესაც ჩვენ განვიხილავთ n-ური რიგის განტოლებებს, ჩვენ ვერ ვთავისუფლდებით f ფუნქციის ქვეწრფივობისგან, ანუ

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b f^*(s,\rho)ds = 0$$

პირობისგან. თუმცა, როგორც ამას [43] ნაშრომი გვიჩვენებს, მეორე რიგის განტოლებისთვის დასმული შერეული და დირიხლეს ამოცანები რეზონანსულ შემთხვევაში ამოხნადია f ფუნქციაზე მეორე არგუმენტის მიხედვით ქვეწრფივობის შეზღუდვის გარეშეც. მაგრამ ეს პირდაპირი შედეგია იმ ფაქტის რომ ამ ამოცანებისთვის არსებობს ამოხსნადობის პირობები არარეზონანსულ შემთხვევაში, რომლებიც არ მოითხოვს f ფუნქციისგან მეორე არგუმენტის მიმართ ქვეწრფივობას და ეს თვისება შემდეგ გადადის რეზონასულ შემთხვევაშიც. მეოთხე რიგის განტოლებებისთვის მსგავს შედეგებს ვერ მივაკვლიეთ, ამიტომ ჩვენითვე შევისწავლეთ მეოთხე რიგის არაწრფივი ამოცანები არარეზონანსულ

შემთხვევაში და მივიღეთ ამოხსნადობის შედეგები რომლებშიც f ფუნქციის მეორე არგუმენტის მიხედვით ქვეწრფივობის მოთხოვნა ნაწილობრივ შემსბუქებულია, რათა მათ საფუძველზე მიგვეღო ამოხსნადობის თეორემები რეზონანსულ შემთხვევაშიც მსგავსი შემსუბუქებული შეზღუდვებით f ფუნქციაზე.

იქამდე სანამ მეოთხე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) + f(t,\, u(t)) + h(t) \tag{2.29}$$

განტოლებას, სასაზღვრო

$$u^{(j_1-1)}(a) = 0 \; (j_1 = 1, \ldots, k), \qquad u^{(j_2-1)}(b) = 0 \; (j_2 = 1, \ldots, 4-k) \tag{2.30_k}$$

პირობებში, სადაც $1 \le k \le 3$, შევისაწვლიდეთ რეზონანსულ შემთხვევაში, შევისწავლით არარეზონანსულ შემთხვევაში. კერძოდ, დავადგენთ (2.29), (2.30_k) ამოცანის ამოხსნადობის ისეთ პირობებს რომლებშიც f ფუნქციას მეორე არგუმენტის მიხედვით წრფივი ტიპის ასიმპტოტიკაც შეიძლება ჰქონდეს. შემდეგ ამ შედეგებზე დაყრდნობით ანალოგიურ შედეგებს მივიღებთ რეზონანსულ შემთხვევაშიც. აღნიშნული შედეგები მჭიდროდაა დაკავშირებული (2.29) განტოლების შესაბამისი წრფივი ერთგაროვანი

$$w^{(4)}(t) = p(t)w(t) \tag{2.31}$$

განტოლების რხევადობის და ამ განტოლების სასაზღვრო

$$w^{(j_1-1)}(a) = 0 \; (j_1 = 1, \ldots, k), \qquad w^{(j_2-1)}(b) = 0 \; (j_2 = 1, \ldots, 4-k) \tag{2.32_k}$$

პირობებში და მის შეუღლებულ სასაზღვრო

$$w^{(j_1-1)}(a) = 0 \; (j_1 = 1, \ldots, 4-k), \qquad w^{(j_2-1)}(b) = 0 \; (j_2 = 1, \ldots, k) \tag{2.32_{4-k}}$$

პირობებში ამოხსნადობის საკითხებთან, რაც ჩვენი სადოქტორო ნაშრომის პირველ თავშია განხილული. ზუსტადაც პირველ თავში დადგენილი ზოგიერთი ფაქტით ვისარგებლებთ (2.29), (2.30_k) ამოცანის ამოხსნადობის და ცალსახად ამოხსნადობის საკითხების შესწავლისას, როგორც რეზონანსულ ისე არარეზონანსულ შემთხვევებში.

- *არარეზონანსული შემთხვევა.* პირველ რიგში ჩვენ დავამტკიცებთ (2.29), (2.30_k) ამოცანის ამოხსნადობის და ამონახსნის ერთადერთობის თეორემებს არარეზონანსულ შემთხვევაში.

***თ ე ო რ ე მ ა* 2.3.** დავუშვათ განტოლება

$$\begin{aligned} w^{(4)}(t) &= [p(t)]_+ w(t) \qquad \text{თუ} \quad k = 2, \\ w^{(4)}(t) &= -[p(t)]_- w(t) \qquad \text{თუ} \quad k = 1 \;\text{ ან }\; k = 3, \end{aligned} \tag{2.33}$$

არარხევადია I შუალედზე და მოიძებნება ისეთი მუდმივი $r \in \mathbb{R}^+$ და ფუნქცია $g \in L(I; \mathbb{R}_0^+)$ რომ სრულდება პირობა

$$-g(t)|x| \le (-1)^k f(t,x) \operatorname{sgn} x \le \delta(t,\, |x|) \qquad \text{თუ} \quad |x| > r, \;\; t \in I, \tag{2.34_k}$$

სადაც $\delta \in K(I \times \mathbb{R}_0^+; \mathbb{R}_0^+)$ ფუნქცია არაკლებადია მეორე არგუმენტის მიხედვით და

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b \delta(s,\, \rho) ds = 0. \tag{2.35}$$

მაშინ (2.29), (2.30_k) ამოცანა ამოხსნადია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა **2.10.** არსებობს საფუძვლიანი ეჭვი, რომ (2.29), (2.30_k) ამოცანა ამოხ-ხნადი იქნება მაშინაც თუ (2.34_k) პირობის ნაცვლად f ფუნქციას უფრო მსუბუქ შეზღუდ-ვას დავადებთ

$$(-1)^k f(t,x)\operatorname{sgn} x \le \delta(t,\,|x|) \qquad \text{თუ} \quad |x| \ge r,\ \ t \in I, \tag{2.36_k}$$

პირობის სახით. მაგალითად, (2.36_k) პირობა უზრუნველყოფს (2.29), (2.30_k) ამოცანის ამოხსნადობას როდესაც $k = 2$ (იხ. [29, თეორემა 3]) თუ სრულდება პირობა

$$0 \le p(t) < \frac{\pi^4}{(b-a)^4} \approx \frac{98}{(b-a)^4},$$

თუმცა ჩვენი თეორემის უფრო მძიმე (2.34_k) პირობის შემთხვევაში, 1.1 თეორემიდან და $\frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \in D_+(I)$ პირობიდან გამომდინარე დასაშვებია p კოეფიციენტი აკმაყოფილებდეს უტოლობას

$$0 \le p(t) < \frac{\lambda_1^4}{(b-a)^4} \approx \frac{501}{(b-a)^4},$$

სადაც λ_1 არის (1.8) წრფივი ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი.

შ ე დ ე გ ი **2.6.** დავუშვათ სრულდება 2.3 თეორემის (2.34_k), (2.35) პირობები. მაშინ თუ დაცულია (1.32_1) უტოლობა როდესაც $k = 2$ და (1.32_2) უტოლობა როდესაც $k = 1$ ან $k = 3$, ამოცანა (2.29), (2.30_k) იქნება ამოხსნადი.

შედეგის სამართლიანობა პირდაპირ გამომდინარეობს 2.3 თეორემიდან იმის გათვა-ლისწინებით, რომ (1.32_1) და (1.32_2) უტოლობები უზრუნველყოფს (2.33)-ის შესაბამისად პირველი და მეორე განტოლებების არარხევადობას.

შევახსენებთ მკითხველს, რომ ქვევით მოყვანილ დებულებებში $D_\pm(I)$ არის 1.2, 1.3 განსაზღვრებებით შემოღებული სიმრავლეები.

თ ე ო რ ე მ ა **2.4.** დავუშვათ $k = 2$, $p^* \in D_+(I)$, და თითქმის ყველგან I სიმრავ-ლეზე სრულდება

$$[f(t,x_1) - f(t,x_2)]\operatorname{sgn}(x_1 - x_2) < [p^*(t) - p(t)]|x_1 - x_2| \tag{2.37_1}$$

უტოლობა, თუ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \ne x_2$. მაშინ (2.29), (2.30_k) ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

თ ე ო რ ე მ ა **2.5.** დავუშვათ $k = 1$ ან $k = 3$, $p_* \in D_-(I)$, და თითქმის ყველგან I შუალედზე სრულდება

$$[f(t,x_1) - f(t,x_2)]\operatorname{sgn}(x_1 - x_2) > [p_*(t) - p(t)]|x_1 - x_2| \tag{2.37_2}$$

უტოლობა, თუ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \ne x_2$. მაშინ (2.29), (2.30_k) ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

***მ ა გ ა ლ ი თ ი* 2.4.** განვიხილოთ $[0,\,1]$ შუალედზე განტოლებები

$$u^{(4)}(t)=p(t)u(t)+(-1)^{k+1}g(t)|u(t)|^{\alpha}\operatorname{sgn}u(t)+h(t), \tag{2.38}$$

$$u^{(4)}(t)=p(t)u(t)+f_0(t)\frac{u(t)}{(1+|u(t)|)^{\beta}}+h(t), \tag{2.39}$$

სადაც $p,\,f_0\in L([0,\,1];\,\mathbb{R}),\;\; g\in L([0,\,1];\,\mathbb{R}_0^+),\;\; \alpha\in\,[0,1]$ და $\beta\in]0,1[$. მაშინ თუ

$$\int_0^1[p(s)]_+ds\le 192 \quad \text{თუ} \quad k=2$$

და

$$\int_0^1[p(s)]_-ds\le 110 \quad \text{თუ} \quad k=1 \;\text{ ან }\; k=3,$$

2.6 შედეგიდან გამომდინარეობს რომ (2.38), (2.30_k) ამოცანა (სადაც $a=0$ და $b=1$) ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი $h\in L([0,\,1];\,\mathbb{R})$ ფუნქციისთვის.

აგრეთვე ვთქვათ $[0,\,1]$ შუალედში სრულდება უტოლობა

$$0\le f_0(t)<\lambda_1^4-p(t) \qquad \text{თუ} \quad k=2,$$

$$0\ge f_0(t)>-\lambda_2^4-p(t) \qquad \text{თუ} \quad k=1 \;\text{ ან }\; k=3,$$

სადაც $\lambda_1\approx 4.73$ $(\lambda_2\approx 5.6)$ არის (1.8), ((1.13)) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი. მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ

$$0<\frac{d}{dx}\frac{x}{(1+|x|)^{\beta}}<1 \qquad \text{თუ} \quad x\in\mathbb{R},$$

და $\lambda_1^4\in D_+([0,\,1]),\; -\lambda_2^4\in D_-([0,\,1])$ (იხ. გვ. 15, შენიშვნა 1.1) მაშინ 2.4 თეორემიდან თუ $k=2$ და 2.5 თეორემიდან თუ $k=1$ ან $k=3$ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (2.39), (2.30_k) ამოცანას არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსნი როგორიც არ უნდა იყოს $h\in L([0,\,1];\,\mathbb{R})$ ფუნქცია.

• *რეზონანსული შემთხვევა.* ახლა, როდესაც რეზონანსიდან გამოყვანილი (2.39), (2.30_k) ამოცანისთვის გვაქვს ამოხსნადობის 2.3 თეორემა, შევძლებთ რეზონასული შემთხვევისთვისაც დავადგინოთ ამ ამოცანის ამონახსნის არსებობის და არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები. კერძოდ კი სამართლიანია:

***თ ე ო რ ე მ ა* 2.6.** დავუშვათ

$$p\in D_+(I) \quad \text{თუ} \quad k=2, \qquad p\in D_-(I) \quad \text{თუ} \quad k=1 \;\text{ ან }\; k=3, \tag{2.40}$$

$$(-1)^k p(t)>0 \qquad \text{თუ} \quad t\in I, \tag{2.41}$$

და მოიძებნება ისეთი $r\in\mathbb{R}^+$ მუდმივი და $f^-,\,f^+,\,g\in L(I;\,\mathbb{R}_0^+)$ ფუნქციები რომ სრულდება პირობები

$$\begin{gathered} f^-(t)\le(-1)^kf(t,x)\le g(t)|x| \qquad \text{თუ} \quad x\le -r,\;\, t\in I,\\ -g(t)|x|\le(-1)^kf(t,x)\le -f^+(t) \qquad \text{თუ} \quad x\ge r,\;\, t\in I. \end{gathered} \tag{2.42}$$

მეტიც, დავუშვათ w არის (2.31), (2.32_{4-k}) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი და მოიძებნება $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ

$$
\begin{gathered}
-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds + \varepsilon\gamma_r||w||_C \le (-1)^k \int_a^b h(s)|w(s)|ds \le \\
\int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C,
\end{gathered}
\tag{2.43_k}
$$

სადაც $\gamma_r = \int_a^b f^*(s,\, r)ds$. მაშინ (2.29), (2.30_k) ამოცანა ამოხსნადია.

(2.43_k) პირობა შეიძლება ჩავანაცვლოთ უფრო ადვილი შესამოწმებელი

$$
\left|\int_a^b h(s)|w(s)|ds\right| \le \int_a^b \widetilde{f}(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C, \tag{2.44}
$$

პირობით სადაც $\widetilde{f}(t) = \min\{f^+(t), f^-(t)\}$ (იხ. 2.5 შენიშვნა).

იმ შემთხვევაში თუ $\widetilde{f} = f^+ = f^-$, ადვილი დასანახია, რომ თეორემას შემდეგი უფრო მარტივი სახე შეიძლება მიეცეს:

***შ ე დ ე გ ი* 2.7.** დავუშვათ დაცულია (2.40), (2.41) მოთხოვნები და მოიძებნება ისეთი $r \in \mathbb{R}^+$ მუდმივი და $\widetilde{f},\, g \in L(I;\, \mathbb{R}_0^+)$ ფუნქციები რომ სრულდება (2.44) და

$$
-g(t)|x| \le (-1)^k f(t,x)\operatorname{sgn} x \le -\widetilde{f}(t) \qquad \text{თუ} \quad |x| \ge r,\;\; t \in I
$$

პირობები. მაშინ (2.29), (2.30_k) ამოცანა ამოხსნადია.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.11.** (2.43_k) $(k = 2)$ პირობაში w ფუნქცია შეგვიძლია ცხადად ჩავწეროთ თუ (2.29), (2.30_k) $(k = 2)$ ამოცანაში $p \equiv \frac{\lambda_{1,n}^4}{(b-a)^4}$, სადაც $\lambda_{1,n}$ არის

$$
w^{(4)}(t) = \lambda_{1,n}^4 w(t), \qquad w^{(j-1)}(0) = 0, \quad w^{(j-1)}(1) = 0 \; (j = 1, 2)
$$

ამოცანის n-ური რიგის საკუთარი რიცხვი, რადგან როგორც ეს [47] ნაშრომშია ნაჩვენები, შესაბამისი საკუთარი ფუნქცია მოიცემა ტოლობით

$$
w_n(t) = \sin\lambda_{1,n}t - \sinh\lambda_{1,n}t + \frac{\sin\lambda_{1,n} - \sinh\lambda_{1,n}}{\cos\lambda_{1,n} - \cosh\lambda_{1,n}}(\cosh\lambda_{1,n}t - \cos\lambda_{1,n}t) \qquad \text{თუ} \quad t \in]0,\, 1[\,,
$$

ხოლო $\lambda_{1,n}$ რიცხვები არის $\cos\lambda \cdot \cosh\lambda = 1$ განტოლების დადებითი ამონახსნები.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.12.** თუ $f \not\equiv 0$, მაშინ 2.6 თეორემის (2.43_k) პირობა შეიძლება ჩავანაცვლოთ შემდეგი მკაცრი უტოლობით

$$
-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds < (-1)^k \int_a^b h(s)|w(s)|ds < \int_a^b f^+(s)|w(s)|ds.
$$

2.1 შედეგის ანალოგიურად ადვილად დავამტკიცებთ შემდეგი დებულების სამართლიანობას.

***შ ე დ ე გ ი* 2.8.** დავუშვათ $r_0 > 0$ და სრულდება პირობები (2.40), (2.41), და

$$-g(t)|x| \le (-1)^k f(t,x)\operatorname{sgn} x \le 0 \qquad \text{თუ} \quad |x| \ge r_0, \ \ t \in I. \tag{2.45}$$

მეტიც, დავუშვათ მოიძებნება ისეთი I^+, $I^- \subset I$ სიმრავლეები, რომ

$$\begin{aligned} &(-1)^k \lim_{x\to+\infty} f(t,\, x) = -\infty \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I^+, \\ &(-1)^k \lim_{x\to-\infty} f(t,\, x) = +\infty \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I^-. \end{aligned} \tag{2.46}$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის (2.29), (2.30_k) ამოცანა ამოხსნადია.

***თ ე ო რ ე მ ა* 2.7.** დავუშვათ დაცულია (2.40), (2.41) პირობები და $f(t,\,0) \equiv 0$. მეტიც, დავუშვათ მოიძებნება ისეთი უწყვეტი ფუნქცია $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, და $g, \ell \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$ ფუნქციები, რომ $\ell \not\equiv 0$ და სრულდება პირობა

$$\begin{aligned} -g(t)|x_1-x_2| \le (-1)^k[f(t,x_1)-f(t,x_2)]\operatorname{sgn}(x_1-x_2) \le \\ \le -\ell(t)\eta(x_1,x_2)|x_1-x_2| \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ x_1,x_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

სადაც

$$\lim_{|\rho|\to+\infty} |\rho|\eta(\rho,\,0) = +\infty. \tag{2.48}$$

მაშინ ნებისმიერი $h \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციისთვის (2.29), (2.30_k) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია.

***შ ე ნ ი შ ვ ნ ა* 2.13.** ადვილი შესამჩნევია, რომ 2.7 თეორემის (2.47) პირობის თანახმად, როგორიც არ უნდა იყოს $h_1 \in L(I;\mathbb{R})$ შეუძლებელია შესრულდეს პირობა $f(t,x) \equiv h_1(t)$. ეს სავსებით ბუნებრივია, რადგან თუ $f(t,x) \equiv h_1(t)$, მაშინ (2.29) განტოლება გადაიქცევა

$$u''(t) = p(t)u(t) + (h(t) + h_1(t))$$

განტოლებად, რომელსაც $p \in D_\pm(I)$ ჩართვის ძალით სასაზღვრო (2.30_k) პირობებში ან საერთოდ არ გააჩნია ამონახსნი, ან უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი აქვს.

***მ ა გ ა ლ ი თ ი* 2.5.** განვიხილოთ $[0,\,1]$ შუალედზე განტოლება

$$u^{(4)}(t) = (-1)^{4-k}\lambda_k^4 u(t) + (-1)^{k+1}\, g(t)|u(t)|^\alpha \ln(1+|u(t)|)\operatorname{sgn} u(t) + h(t), \tag{2.49}$$

სადაც $\lambda_1 \approx 4.73$ და $\lambda_2 = \lambda_3 \approx 5.6$, შესაბამისად (1.8) და (1.13) ამოცანების პირველი საკუთარი რიცხვებია, $\alpha \in]0,\,1[$ და $g \in L([0,\,1];\mathbb{R}_0^+)$. მაშინ 2.7 თეორემის ძალით (2.49), (2.30_k) ამოცანა (სადაც $a = 0$ და $b = 1$) ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი $h \in L([0,\,1];\mathbb{R})$ ფუნქციისათვის.

მართლაც თუ შემოვიღებთ

$$f(t,\,x) = (-1)^{k+1} g(t)|x|^\alpha \ln(1+|x|)\operatorname{sgn} x,$$

მაშინ ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის თეორემის ძალით მოიძებნება ისეთი უწყვეტი $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ფუნქცია, რომ $\varphi(|x_1|, |x_2|) = 0$ მხოლოდ მაშინ თუ $x_1 = x_2 = 0$, და სამართლიანი იქნება ტოლობა

$$(-1)^k[f(t, x_1) - f(t, x_2)] \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) = -g(t)\eta(x_1, x_2)|x_2 - x_1|,$$

სადაც

$$\eta(x_1, x_2) = -\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(|x_1|, |x_2|)},$$

და იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = -g(t)\Big(\frac{\alpha \ln(1+|x|)}{|x|^{1-\alpha}} + \frac{|x|^\alpha}{1+|x|}\Big) \geq -g(t),$$

ადვილად დავრწმუნდებით (2.47) და (2.48) პირობების სამართლიანობაში.

2.2 დამხმარე დებულებები

***ლ ე მ ა* 2.1.** დავუშვათ u_ν $(\nu \in \mathbb{N})$ ფუნქციები აკმაყოფილებს (2.2_k) სასაზღვრო პირობებს, w_1 ფუნქცია არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი, $v_\nu = u_\nu||u_\nu||_C^{-1}$, და

$$\lim_{\nu\to+\infty} v_\nu^{(j)}(t) = w_1^{(j)}(t)\ (j = 0, \dots, n-1) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I. \tag{2.50}$$

მაშინ მოიძებნება $0 < \delta' < \frac{b-a}{2}$ და $\nu_1 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\operatorname{sgn} u_\nu(t) = \operatorname{sgn} w_1(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\ a+\delta'] \cup [b-\delta',\ b[\,,\ \nu > \nu_1.$$

დამტკიცება. როგორც 2.2 შენიშვნაში ვთქვით, რაკი (2.4), (2.5_k) ამოცანას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი w_1, ეს იმას ნიშნავს რომ სრულდება (2.3_k) უტოლობა. დავუშვათ $w_1^{(k)}(a) = 0$. მაშინ 2.2 შენიშვნის ძალით, რაკი სრულდება (2.3_k) უტოლობა, გამოვა რომ $w_1 \equiv 0$ როგორც (2.4), (2.5_{k+1}) ამოცანის ამონახსნი. ამდენად ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და $w_1^{(k)}(a) \neq 0$.

ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $w_1^{(k)}(a) > 0$, მაშინ (2.50) პირობის თანახმად მოიძებნება $\nu_1 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $u_\nu^{(k)}(a) > 0$ თუ $\nu > \nu_1'$, და ამიტომ $u_\nu^{(k)}$ ფუნქციის უწყვეტობის ძალით აგრეთვე მოიძებნება $\delta_0 \in \Big]0,\ \frac{b-a}{2}\Big[$ ისეთი, რომ

$$u_\nu^{(k)}(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\ a+\delta_0[\,,\ \nu > \nu_1'.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ (2.2_k) პირობების ძალით სამართლიანია ტოლობა

$$u_\nu^{(k-j)}(t) = \int_a^t u_\nu^{(k-j+1)}(s)ds\ (j = 1, \dots, k) \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\ a+\delta_0[\,,\ \nu > \nu_1'.$$

დავრწმუნდებით, რომ

$$u_\nu^{(k-j)}(t) > 0\ (j = 1, \dots, k) \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\ a+\delta_0[\,,\ \nu > \nu_1'.$$

მსგავსი მსჯელობით $w_1^{(k)}(a) > 0$ უტოლობიდან დავრწმუნდებით ისეთი $\delta_0' \in]0,\ \delta_0]$ რიცხვის არსებობაში რომ შესრულდება უტოლობა

$$w_1(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\ a+\delta_0'[\,.$$

ორი უკანასკნელი უტოლობიდან კი ცხადია რომ

$$\operatorname{sgn} u_\nu(t) = \operatorname{sgn} w_1(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\ a+\delta_0']\,,\ \nu > \nu_1'.$$

ანალოგიური მსჯელობის b წერტილში ჩატარებით დავრწმუნდებით, რომ $w^{(n-k)}(b) \neq 0$, და რომ არსებობს ისეთი $\delta_0'' > 0$ და $\nu_1'' \in \mathbb{N}$ რიცხვები, რომ

$$\operatorname{sgn} u_\nu(t) = \operatorname{sgn} w_1(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in\ [b-\delta_0'',\ b[\,,\ \nu > \nu_1''.$$

ახლა თუ შემოვიღებთ $\delta' = \min\{\delta_0',\, \delta_0''\},\ \nu_1 = \max\{\nu_1',\, \nu_1''\}$, უკანასკნელი ორი უტოლობიდან პირდაპირ გამომდინარეობს ჩვენი ლემის სამართლიანობა. $\square$

დავუშვათ $N_{p,n} = \{t_1, \dots, t_{k_0}\}$ სადაც $t_j \in]a, b[\ (j = 1, \dots, k_0)$ და $\delta'' > 0$ მუდმივი აკმაყოფილებს უტოლობას

$$0 < \delta'' < \frac{1}{2}\min\{t_1 - a,\ b - t_{k_0},\ t_j - t_{j-1} : j = 2, \dots, k_0\},$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ლემა:

***ლ ე მ ა* 2.2.** დავუშვათ $N_{p,n} \neq \emptyset,\ f_1 \in E(N_{p,n})$ და w_1 არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი. მაშინ ნებისმიერი $r > 0$ და $\delta \in]0,\ \delta''[$ რიცხვებისთვის მოიძებნება $\lambda \in]0,\ \delta[$ ისეთი, რომ

$$\begin{gathered}\int\limits_{I_\delta \setminus U_\lambda} |f_1(s,x)w_1(s)|ds - \int\limits_{U_\lambda} |f_1(s,x)w_1(s)|ds \geq \\ \int_{I_\delta \setminus U_\delta} |f_1(s,x)w_1(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad |x| \geq r,\end{gathered} \tag{2.51}$$

სადაც $N_{p,n}$ სიმრავლის U_λ, U_δ მიდამოები განისაზღვრება (2.20) ტოლობით და

$$I_\delta := [a+\delta,\ b-\delta].$$

დამტკიცება. 2.1 განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ისეთი დადებითი $\lambda_1 < \delta$ რიცხვის არსებობა, რომ

$$\int\limits_{U_\delta \setminus U_{\lambda_1}} |f_1(s,x)|ds - \int\limits_{U_{\lambda_1}} |f_1(s,x)|ds \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad |x| \geq r. \tag{2.52}$$

აგრეთვე $\lambda_1,\ \delta,\ \delta''$, მუდმივების შემოღების წესიდან ცხადია, რომ

$$N_{p,n} \subset U_{\lambda_1} \subset U_\delta \subset I_\delta.$$

მაშინ თუ w_0 არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის ისეთი ამონახსნი რომ $||w_0||_C = 1$, უკანასკნელი ჩართვებიდან ცხადია ისეთი λ, β_0, რიცხვების არსებობა, რომ

$$U_\lambda \subset H_{\beta_0} \overset{def}{\equiv} \Big\{t \in I_\delta : |w_0(t)| \leq \beta_0\Big\} \subset U_{\lambda_1}.$$

ორი უკანასკნელი გამოსახულებიდან მივიღებთ ჩართვებს

$$U_\lambda \subset H_{\beta_0} \subset U_{\lambda_1} \subset U_\delta \subset I_\delta, \tag{2.53}$$

საიდანაც ცხადია შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$$|w_0(t)| > \beta_0 \qquad \text{თუ} \quad t \in U_\delta \setminus H_{\beta_0}. \tag{2.54}$$

აგრეთვე (2.53) ჩართვებიდან გამომდინარეობს წარმოდგენა

$$I_\delta \setminus H_{\beta_0} = (I_\delta \setminus U_\delta) \cup (U_\delta \setminus H_{\beta_0}),$$

სადაც

$$(I_\delta \setminus U_\delta) \cap (U_\delta \setminus H_{\beta_0}) = \emptyset.$$

მაშინ უკანასკნელი წარმოდგენის, 2.3 შენიშვნისა და (2.53), (2.54) გამოსახულებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{1}{||w_1||_C}\Big(\int\limits_{I_\delta\setminus U_\lambda} |f_1(s,x)w_1(s)|ds - \int\limits_{U_\lambda} |f_1(s,x)w_1(s)|ds\Big) =$$

$$= \int\limits_{I_\delta\setminus U_\lambda} |f_1(s,x)w_0(s)|ds - \int\limits_{U_\lambda} |f_1(s,x)w_0(s)|ds \geq$$

$$\int\limits_{I_\delta\setminus H_{\beta_0}} |f_1(s,x)w_0(s)|ds - \int\limits_{H_{\beta_0}} |f_1(s,x)w_0(s)|ds =$$

$$\int_{I_\delta\setminus U_\delta} |f_1(s,x)w_0(s)|ds + \int\limits_{U_\delta\setminus H_{\beta_0}} |f_1(s,x)w_0(s)|ds - \int\limits_{H_{\beta_0}} |f_1(s,x)w_0(s)|ds \geq$$

$$\int_{I_\delta\setminus U_\delta} |f_1(s,x)w_0(s)|ds + \beta_0\Big(\int\limits_{U_\delta\setminus H_{\beta_0}} |f_1(s,x)|ds - \int\limits_{H_{\beta_0}} |f_1(s,x)|ds\Big) \geq$$

$$\int_{I_\delta\setminus U_\delta} |f_1(s,x)w_0(s)|ds + \beta_0\Big(\int\limits_{U_\delta\setminus U_{\lambda_1}} |f_1(s,x)|ds - \int\limits_{U_{\lambda_1}} |f_1(s,x)|ds\Big).$$

(2.52) უტოლობის გათვალისწინებით კი უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (2.51) შეფასების სამართლიანობა. □

დავუშვათ $u_\nu \in \widetilde{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$, $\|u_\nu\|_C \neq 0$ $(\nu \in \mathbb{N})$, w_1 არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის ნებისმიერი არანულოვანი ამონახსნი და $r > 0$. მაშინ შემოვიღოთ:

$$\Omega^+_{w_1} \overset{def}{=} \{t \in I : w_1(t) > 0\}, \qquad \Omega^-_{w_1} \overset{def}{=} \{t \in I : w_1(t) < 0\},$$

$$A_{\nu,1} \overset{def}{=} \{t \in I : |u_\nu(t)| > r\}, \qquad A_{\nu,2} \overset{def}{=} \{t \in I : |u_\nu(t)| \leq r\},$$

$$B_{\nu,\ell} \overset{def}{=} \{t \in A_{\nu,1} \ :\ \operatorname{sgn} u_\nu(t) = (-1)^{\ell-1}\operatorname{sgn} w_1(t)\} \ \ (\ell = 1,2).$$

ამ განსაზღვრებებიდან ცხადია, რომ ნებისმიერი $\nu \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის სამართლიანია ტოლობები

$$\begin{aligned} A_{\nu,2} \cap A_{\nu,1} = \emptyset, \qquad A_{\nu,2} \cup A_{\nu,1} = I, \\ B_{\nu,1} \cap B_{\nu,2} = \emptyset, \qquad B_{\nu,1} \cup B_{\nu,2} = A_{\nu,1} \subset I. \end{aligned} \tag{2.55}$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ქვევით მოყვანილ ლემაში მონაწილე U_λ, U_δ სიმრავლეები არის $N_{p,n} \neq \emptyset$ სიმრავლის მიდამოები, და

$$I_\delta := [a+\delta,\ b-\delta], \qquad \delta_0 = \min\{\delta',\ \delta''\},$$

სადაც δ' და δ'' შესაბამისად 2.1 და 2.2 ლემებში შემოღებული რიცხვებია.

ლ ე მ ა 2.3. დავუშვათ $r > 0$, ფუნქციები $u_\nu \in \widetilde{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$ $(\nu \in \mathbb{N})$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$u_\nu^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1,\dots,k), \qquad u_\nu^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1,\dots,n-k), \tag{2.56_k}$$

$$||u_\nu||_C > 2r\nu \qquad \text{თუ} \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{2.57}$$

და $N_{p,n} \neq \emptyset$, ხოლო w_1 არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის ისეთი არანულოვანი ამონახსნი, რომ

$$||v_\nu^{(j)} - w_1^{(j)}||_C \le \frac{1}{2\nu} \qquad \text{თუ} \quad \nu \in \mathbb{N} \ (j = 0,1), \tag{2.58}$$

სადაც $v_\nu(t) = u_\nu(t)||u_\nu||_C^{-1}$. მაშინ მოცემული r და ნებისმიერი $\delta \in]0,\ \delta_0[$ და $\lambda \in]0,\delta[$ მუდმივებისთვის მოიძებნება $\nu_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$I_\delta \setminus U_\lambda \subset \bigcap_{\nu=\nu_0}^{+\infty} B_{\nu,1}, \tag{2.59}$$

$$B_{\nu,2} \subset U_\lambda \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_0, \tag{2.60}$$

და

$$\pm u_\nu(t) \ge r \qquad \text{თუ} \quad t \in \Omega_{w_1}^{\pm} \cap (I_\delta \setminus U_\delta), \quad \nu > \nu_0. \tag{2.61}$$

მეტიც

$$\lim_{\nu\to+\infty} \operatorname{mes} A_{\nu,2} = 0, \qquad \lim_{\nu\to+\infty} \operatorname{mes} A_{\nu,1} = b-a, \tag{2.62}$$

$$\lim_{\nu\to+\infty} \operatorname{mes} B_{\nu,2} = 0, \qquad \lim_{\nu\to+\infty} \operatorname{mes} B_{\nu,1} = b-a, \tag{2.63}$$

და

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{mes}(\Omega_{w_1}^{\pm} \setminus [\Omega_{w_1}^{\pm} \cap (I_\delta \setminus U_\delta)]) = 0. \tag{2.64}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ 2.1 ლემის ძალით (2.56_k), (2.58) პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $\nu_1 \in \mathbb{N}$ რიცხვის არსებობა, რომ

$$\operatorname{sgn} w_1(t) = \operatorname{sgn} u_\nu(t) \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1, \quad t \in [a,\ a+\delta] \cup [b-\delta,\ b] = I \setminus I_\delta,$$

და ამდენად

$$(I \setminus I_\delta) \cap B_{\nu,2} = \emptyset \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1. \tag{2.65}$$

აგრეთვე იმის გათვალისწინებით რომ $I_\delta \setminus U_\lambda$ ჩაკეტილი სიმრავლეა და მასში არ შედის w_1 ფუნქციის არცერთი ნული, შესრულდება უტოლობა

$$\min\{|w_1(t)| : t \in I_\delta \setminus U_\lambda\} > 0,$$

საიდანაც ცხადია ისეთი $\nu_0 > \nu_1$ რიცხვის არსებობა, რომ

$$|w_1(t)| \geq 1/\nu_0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I_\delta \setminus U_\lambda. \tag{2.66}$$

მაგრამ უკანასკნელი უტოლობიდან (2.58) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{1}{\nu_0} \leq |w_1(t)| - |v_\nu(t)| + |v_\nu(t)| \leq ||w_1(t) - v_\nu(t)||_C + |v_\nu(t)| \leq \frac{1}{2\nu_0} + |v_\nu(t)|, \tag{2.67}$$

და ამდენად

$$|v_\nu(t)| \geq 1/2\nu_0 \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0,\ t \in I_\delta \setminus U_\lambda. \tag{2.68}$$

ამ უტოლობიდან და (2.66), (2.58) პირობებიდან მივიღებთ

$$\operatorname{sgn} w_1(t) = \operatorname{sgn} u_\nu(t) \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0,\ t \in I_\delta \setminus U_\lambda. \tag{2.69}$$

აგრეთვე (2.57) და (2.68) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$|u_\nu(t)| > \nu r/\nu_0 \geq r \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0,\ t \in I_\delta \setminus U_\lambda, \tag{2.70}$$

რაც (2.69) ტოლობებთან ერთად მოგვცემს, რომ თუ $t \in I_\delta \setminus U_\lambda$ მაშინ $t \in B_{\nu,1}$ როდესაც $\nu > \nu_0$, და ამდენად სრულდება (2.59) პირობა. ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა ისეთი ზრდადი $\{\nu_j\}_{j=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა, რომ $t'_{\nu_j} \in B_{\nu_j,2}$ მაგრამ $t'_{\nu_j} \notin U_\lambda$. მაშინ თუ გავითვალისწინებთ (2.65) პირობას მივიღებთ $t'_{\nu_j} \notin I \setminus I_\delta$, რაც (2.59) ჩართვასთან ერთად მოგვცემს

$$t'_{\nu_j} \in [I \setminus (I \setminus I_\delta)] \setminus U_\lambda = I_\delta \setminus U_\lambda \subset B_{\nu_j,1} \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_0.$$

მაგრამ უკანასკნელი ჩართვა ეწინააღმდეგება (2.55) პირობებს. მიღებული წინააღმდეგობა კი გვიჩვენებს (2.60) ჩართვის სამართლიანობას.

რადგან ნებისმიერი $\delta \in]0, \delta_0[$ და $\lambda \in]0, \delta[$ მუდმივებისთვის მოიძებნება $\nu_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ სრულდება (2.59) ჩართვა, მაშინ ტრივიალური ტოლობიდან

$$\lim_{\delta \to 0} \operatorname{mes}(I_\delta \setminus U_\lambda) = b - a$$

გამომდინარეობს, რომ სრულდება (2.63) ტოლობებიდან მეორე, რომლიდანაც (2.55) პირობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (2.63) პირობებიდან პირველის და (2.62) პირობებიდან მეორის სამართლიანობა. საიდანაც ისევ (2.55) პირობების გათვალისწინებით დავრწმუნდებით (2.62) პირობებიდან პირველის სამართლიანობაში.

აგრეთვე ადვილი დასანახია, რომ (2.61) პირობის სამართლიანობა პირდაპირ გამომდინარეობს (2.69) და (2.70) პირობებიდან.

და ბოლოს, შევნიშნოთ, რომ ტრივიალური ტოლობიდან

$$\lim_{\delta \to 0} \operatorname{mes}(I_\delta \setminus U_\delta) = b - a$$

გამომდინარეობს (2.64) პირობის სამართლიანობა. $\square$

ლ ე მ ა 2.4. დავუშვათ r, δ_0 მუდმივები და u_ν, v_ν, w_1 ფუნქციები ისეთია, როგორც 2.3 ლემაში, იმ განსხვავებით რომ $N_{p,n} = \emptyset$. მაშინ ნებისმიერი $\delta \in]0, \delta_0[$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\nu_0 \in \mathbb{N}$, რომ

$$\operatorname{sgn} u_\nu(t) = \operatorname{sgn} w_1(t) \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0, \quad t \in I, \tag{2.71}$$

$$I_\delta := [a+\delta, \, b-\delta] \subset A_{\nu,1} \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0, \tag{2.72}$$

და შესრულდება (2.62) ტოლობები.

დამტკიცება. რადგან $N_{p,n} = \emptyset$ და სრულდება (2.58) პირობა, მაშინ 2.1 ლემის საშუალებით ადვილად დავრწმუნდებით ისეთი ν_1 რიცხვის არსებობაში, რომ

$$\operatorname{sgn} u_\nu(t) = \operatorname{sgn} w_1(t) \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1, \quad t \in I,$$

ანუ როგორიც არ უნდა იყოს $\nu_0 > \nu_1$ სამართლიანი იქნება (2.71) ტოლობა.

აგრეთვე $N_{p,n} = \emptyset$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\delta > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება $\nu_0 > \nu_1$ ისეთი, რომ

$$|w_1(t)| \geq 1/\nu_0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I_\delta.$$

მაშინ I_δ სიმრავლეზე შესრულდება (2.67) უტოლობა როდესაც $\nu > \nu_0$. აქედან წინა ლემის დამტკიცებაში ჩატარებული მსჯელობის გამეორებით დავრწმუნდებით, რომ I_δ სიმრავლეზე სამართლიანია (2.70) უტოლობა როდესაც $\nu > \nu_0$, რაც $A_{\nu,1}$ სიმრავლის განსაზღვრების ძალით იმას ნიშნავს რომ სრულდება (2.72) ჩართვა. აგრეთვე δ მუდმივის ნებისმიერობის გათვალისწინებით (2.72) ჩართვიდან და (2.55) ტოლობებიდან ცხადია (2.62) ტოლობების სამართლიანობა. □

ახლა ნებისმიერი $x, y \in C(I; \, \mathbb{R})$ ფუნქციისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathbb{M}(x, \, y) := \int_a^b [h_1(s) + f_1(s, x(s))] \, y(s) ds.$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ლემა:

ლ ე მ ა 2.5. დავუშვათ r მუდმივი და u_ν, w_1 ფუნქციები ისეთია როგორც 2.4 ლემაში, ხოლო $f_1 \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $f^-, f^+ \in L(I; \, \mathbb{R}^+)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{aligned} f_1(t,x) &\leq -f^-(t) \qquad \text{თუ} \quad x \leq -r, \;\; t \in I, \\ f^+(t) &\leq f_1(t,x) \qquad \text{თუ} \quad x \geq r, \;\; t \in I. \end{aligned} \tag{2.73}$$

მეტიც, დავუშვათ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი რომ (2.4^*), (2.5_{n-k}) ამოცანის რაიმე w ამონახსნისთვის სრულდება

$$\begin{gathered} -\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds + \varepsilon\gamma_r||w||_C \leq -\int_a^b h_1(s)|w(s)|ds \leq \\ \int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - \varepsilon\gamma_r||w||_C \end{gathered} \tag{2.74}$$

პირობა, სადაც $\gamma_r = \int_a^b f_1^*(t,\, r)ds$. მაშინ (2.4*), ($2.5_{n-k}$) ამოცანის ნებისმიერი ისეთი w_2 ამონახსნისთვის, რომ

$$w_1(t)w_2(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\, b[\,, \tag{2.75}$$

მოიძებნება $\nu_1 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ სამართლიანი იქნება შეფასება

$$\mathbb{M}(u_\nu,\, w_2) \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_1. \tag{2.76}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $N_{p,n} = \emptyset$ პირობის თანახმად w_1 ფუნქციას არ გააჩნია ნულები I შუალედის შიგა წერტილებში, ანუ 1.1 დებულების თანახმად (იხ. გვ. 25) რიცხვი 1 არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი. ასეთ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია 1 იქნება მისი შეუღლებული წრფივი ერთგვაროვანი (2.4*), (2.5_{n-k}) ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვიც და როგორც ეს ისევ 1.1 დებულებიდან გამომდინარეობს (2.4*), (2.5_{n-k}) ამოცანის არცერთ ამონახსნს არ ექნება ნული I შუალედის შიგა წერტილებში. ამიტომ არსებობს (2.4*), (2.5_{n-k}) ამოცანის ისეთი w_2 ამონახსნი, რომელსაც იგივე ნიშანი აქვს I შუალედში რაც w_1 ფუნქციას, ანუ შესრულდება (2.75) უტოლობა. აგრეთვე 2.3 შენიშვნის ძალით, w და w_2 წრფივად დამოკიდებული ფუნქციები იქნება, ანუ მოიძებნება $\beta \in \mathbb{R}$ ისეთი, რომ შესრულდება ტოლობა

$$w_2(t) = \beta w(t) \;\; (|\beta| = ||w_2||_C/||w||_C) \qquad \text{თუ} \quad t \in I. \tag{2.77}$$

აქვე დავუშვათ, რომ ν_0 არის 2.4 ლემაში შემოღებული მუდმივი. მაშინ (2.62) ტოლობების გათვალისწინებით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $\nu_1 \geq \nu_0$ ისეთი, რომ

$$\begin{gathered}
\int_{A_{\nu,2}} f_1^*(s,\, r)ds \leq \frac{\varepsilon}{2}\gamma_r \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1, \\
\frac{1}{||w_2||_C}\int_a^b f^+(s)|w_2(s)|ds - \frac{\varepsilon}{2}\gamma_r \leq \frac{1}{||w_2||_C}\int_{A_{\nu,1}} f^+(s)|w_2(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1, \\
\frac{1}{||w_2||_C}\int_a^b f^-(s)|w_2(s)|ds - \frac{\varepsilon}{2}\gamma_r \leq \frac{1}{||w_2||_C}\int_{A_{\nu,1}} f^-(s)|w_2(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1,
\end{gathered} \tag{2.78}$$

სადაც თუ $f_1 \equiv 0$, მაშინ შეგვიძლია მივიჩნიოთ რომ $\gamma_r \equiv f^- \equiv f^+ \equiv 0$, ხოლო (2.55) ტოლობებიდან გამომდინარე სამართლიანი იქნება წარმოდგენა

$$\begin{gathered}
\mathbb{M}(u_\nu,\, w_2) = \int_{A_{\nu,2}} f_1(s, u_\nu(s))\, w_2(s)ds + \int_a^b h_1(s)\, w_2(s)ds + \\
\int_{A_{\nu,1}} f_1(s, u_\nu(s))\, w_2(s)ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1.
\end{gathered} \tag{2.79}$$

$A_{\nu,1}$ სიმრავლის განსაზღვრების, (2.73) უტოლობების და (2.71) ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$f_1(t, u_\nu(t)) \leq -f^-(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in A_{\nu,1},\; w_1 \leq 0,$$

$$f^+(t) \leq f_1(t, u_\nu(t)) \qquad \text{თუ} \quad t \in A_{\nu,1},\; w_1 \geq 0.$$

რაც (2.75) უტოლობის ძალით მოგვცემს შეფასებებს

$$f_1(t, u_\nu(t)) \leq -f^-(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in A_{\nu,1},\; w_2 \leq 0,$$

$$f^+(t) \le f_1(t, u_\nu(t)) \qquad \text{თუ} \quad t \in A_{\nu,1},\ w_2 \ge 0,$$

საიდანაც თავის მხრივ მივიღებთ

$$\begin{aligned} f_1(t,u_\nu(t))w_2(t) &\ge f^-(t)|w_2(t)| \qquad \text{თუ} \quad t \in A_{\nu,1},\ w_2 \le 0, \\ f_1(t,u_\nu(t))w_2(t) &\ge f^+(t)|w_2(t)| \qquad \text{თუ} \quad t \in A_{\nu,1},\ w_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{2.80}$$

ამიტომ (2.79) წარმოდგენაში პირველი (2.78) უტოლობის და (2.80) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\mathbb{M}(u_\nu,\, w_2) \ge -\frac{\varepsilon}{2}\gamma_r ||w_2||_C + \int_a^b h_1(s)|w_2(s)|ds + \int_{A_{\nu,1}} f^+(s)|w_2(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1,$$

როდესაც $w_1(t) \ge 0$ თუ $t \in I$, და

$$\mathbb{M}(u_\nu,\, w_2) \ge -\frac{\varepsilon}{2}\gamma_r ||w_2||_C - \int_a^b h_1(s)|w_2(s)|ds + \int_{A_{\nu,1}} f^-(s)|w_2(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1,$$

როდესაც $w_2(t) \le 0$ თუ $t \in I$. ახლა უკანასკნელ შეფასებას თუ გავყოფთ $||w_2||_C$ რიცხვზე და (2.78) უტოლობების გამოყენების შემდეგ გავამრავლებთ $||w||_C$ რიცხვზე, (2.77) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{\mathbb{M}(u_\nu,\, w_2)}{|\beta|} \ge -\varepsilon\gamma_r ||w||_C + \int_a^b h_1(s)|w(s)|ds + \int_a^b f^+(s)|w(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1,$$

$$\frac{\mathbb{M}(u_\nu,\, w_2)}{|\beta|} \ge -\varepsilon\gamma_r ||w||_C - \int_a^b h_1(s)|w(s)|ds + \int_a^b f^-(s)|w(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1.$$

უკანასკნელი შეფასებებიდან (2.74) უტოლობების გათვალისწინებით უშუალოდ გამომდინარეობს (2.76) შეფასების სამართლიანობა. □

***ლ ე მ ა* 2.6.** დავუშვათ r, δ_0 მუდმივები და u_ν, w_1 ფუნქციები ისეთია როგორც 2.3 ლემაში, ხოლო $f_1 \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $f^-, f^+ \in L(I; \mathbb{R}^+)$ ფუნქციები აკმაყოფილებს (2.73) პირობებს და $N_{p,n} \ne \emptyset$, $f_1 \in E(N_{p,n})$. მეტიც, დავუშვათ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი რომ (2.4), (2.5_k) ამოცანის რაიმე w ამონახსნისთვის სრულდება

$$\begin{aligned} -\int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+\Big)ds + \varepsilon\gamma_r ||w||_C \le \\ -\int_a^b h_1(s)w(s)ds \le \\ \le \int_a^b \Big(f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+\Big)ds - \varepsilon\gamma_r ||w||_C \end{aligned} \tag{2.81}$$

პირობა, სადაც $\gamma_r = \int_a^b f_1^*(t,\, r)ds$. მაშინ მოიძებნება $\nu_1 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ სამართლიანი იქნება შეფასება

$$\mathbb{M}(u_\nu,\, w_1) \ge 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu \ge \nu_1. \tag{2.82}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ რომ (2.62) და (2.64) ტოლობების გათვალისწინებით ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta \in]0, \delta_0[$ და $\nu_2 \in \mathbb{N}$, რომ

$$\begin{gathered}\int_{A_{\nu,2}} f_1^*(s, r)ds \le \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_r \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_2, \\ \frac{1}{||w_1||_C}\int_{\Omega_{w_1}^+} f^+(s)|w_1(s)|ds - \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_r \le \frac{1}{||w_1||_C}\int_{\Omega_{w_1}^+\cap(I_\delta\setminus U_\delta)} f^+(s)|w_1(s)|ds, \\ \frac{1}{||w_1||_C}\int_{\Omega_{w_1}^-} f^-(s)|w_1(s)|ds - \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_r \le \frac{1}{||w_1||_C}\int_{\Omega_{w_1}^-\cap(I_\delta\setminus U_\delta)} f^-(s)|w_1(s)|ds,\end{gathered} \tag{2.83}$$

სადაც თუ $f_1 \equiv 0$, მაშინ შეგვიძლია მივიჩნიოთ რომ $\gamma_r \equiv f^- \equiv f^+ \equiv 0$. ასე შერჩეული δ რიცხვისთვის 2.2 ლემის ძალით მოიძებნება $\lambda \in]0, \delta[$ ისეთი, რომ შესრულდება (2.51) უტოლობა და ასე შერჩეული δ და λ რიცხვებისთვის კი 2.3 ლემის ძალით მოიძებნება $\nu_0 > \nu_2$ ისეთი, რომ შესრულდება (2.59)-(2.61) პირობები, ხოლო (2.55) ტოლობებიდან გამომდინარე სამართლიანი იქნება წარმოდგენა

$$\begin{gathered}\mathbb{M}(u_\nu, w_1) = \int_{A_{\nu,2}} f_1(s, u_\nu(s))w_1(s)ds + \int_a^b h_1(s)w_1(s)ds + \\ + \int_{B_{\nu,1}} f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)ds + \int_{B_{\nu,2}} f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)ds \qquad \text{თუ} \quad \nu \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{2.84}$$

აგრეთვე $B_{\nu,\ell}$ $(\ell = 1,2)$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან და (2.73) პირობიდან, მივიღებთ შეფასებას

$$(-1)^{\ell-1}f_1(t, u_\nu(t))w_1(t) \ge 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in B_{\nu,\ell},\ \ell = 1, 2,\ \nu \in \mathbb{N},$$

რისი (2.84) წარმოდგენაში გათვალისწინებაც მოგვცემს

$$\begin{gathered}\mathbb{M}(u_\nu, w_1) = \int_{A_{\nu,2}} f_1(s, u_\nu(s))w_1(s)ds + \int_a^b h_1(s)w_1(s)ds + \\ + \int_{B_{\nu,1}} f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)ds - \int_{B_{\nu,2}} |f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{2.85}$$

მაშინ (2.59), (2.60) და (2.51) გამოსახულებების ძალით, (2.85) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\begin{gathered}\mathbb{M}(u_\nu, w_1) \ge -\int_{A_{\nu,2}} f^*(s, r)ds||w_1||_C + \int_a^b h_1(s)w_1(s)ds + \\ \int_{I_\delta\setminus U_\lambda} |f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)|ds - \int_{U_\lambda} |f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)|ds \ge -\int_{A_{\nu,2}} f^*(s, r)ds||w_1||_C + \\ \int_a^b h_1(s)w_1(s)ds + \int_{I_\delta\setminus U_\delta} |f_1(s,u_\nu(s))w_1(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu \ge \nu_0.\end{gathered} \tag{2.86}$$

აგრეთვე თუ მხედველობაში მივიღებთ რომ

$$I_\delta \setminus U_\delta \subset I_\delta \setminus N_{p,n} \subset \Omega_{w_1}^- \cup \Omega_{w_1}^+,$$

მაშინ $\Omega^-_{w_1} \cap \Omega^+_{w_1} = \emptyset$ ტოლობა და (2.61), (2.73) უტოლობები მოგვცემს შეფასებას

$$\begin{gathered}\int\limits_{I_\delta \setminus U_\delta} |f_1(s, u_\nu(s))w_1(s)|ds = \int_{\Omega^+_{w_1} \cap (I_\delta \setminus U_\delta)} f_1(s, u_\nu(s))|w_1(s)|ds- \\ \int_{\Omega^-_{w_1} \cap (I_\delta \setminus U_\delta)} f_1(s, u_\nu(s))|w_1(s)|ds \geq \\ \geq \int_{\Omega^+_{w_1} \cap (I_\delta \setminus U_\delta)} f^+(s)|w_1(s)|ds + \int_{\Omega^-_{w_1} \cap (I_\delta \setminus U_\delta)} f^-(s)|w_1(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0.\end{gathered} \tag{2.87}$$

ახლა კი (2.86) უტოლობის $||w_1||_C$ რიცხვზე გაყოფით მიღებულ გამოსახულებაში თუ გავითვალისწინებთ (2.87) და შემდეგ (2.83) უტოლობებს და მიღებულ გამოსახულებას გავამრავლებთ $||w||_C$ რიცხვზე მივიღებთ

$$\begin{gathered}||w||_C \frac{\mathbb{M}(u_\nu,\, w_1)}{||w_1||_C} \geq -\varepsilon\gamma_r ||w||_C + \frac{||w||_C}{||w_1||_C} \int_a^b h_1(s) w_1(s) ds+ \\ \frac{||w||_C}{||w_1||_C} \int_{\Omega^+_{w_1}} f^+(s)|w_1(s)|ds + \frac{||w||_C}{||w_1||_C} \int_{\Omega^-_{w_1}} f^-(s)|w_1(s)|ds \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_0.\end{gathered} \tag{2.88}$$

აგრეთვე ჩვენი ლემის პირობებიდან ცხადია რომ სრულდება (2.6) ტოლობა და მაშინ

$$\int_{\Omega^+_{w_1}} f^+(s)|w_1(s)|ds = \beta \int_{\Omega^+_{w_1}} f^+(s)[w(s)]_+ ds = \beta \int_a^b f^+(s)[w(s)]_+ ds,$$

$$\int_{\Omega^-_{w_1}} f^-(s)|w_1(s)|ds = \beta \int_{\Omega^-_{w_1}} f^-(s)[w(s)]_- ds = \beta \int_a^b f^-(s)[w(s)]_- ds,$$

თუ $\beta = ||w_1||_C / ||w||_C$, და

$$\int_{\Omega^+_{w_1}} f^+(s)|w_1(s)|ds = |\beta| \int_{\Omega^+_{w_1}} f^+(s)[w(s)]_- ds = |\beta| \int_a^b f^+(s)[w(s)]_- ds,$$

$$\int_{\Omega^-_{w_1}} f^-(s)|w_1(s)|ds = |\beta| \int_{\Omega^-_{w_1}} f^-(s)[w(s)]_+ ds = |\beta| \int_a^b f^-(s)[w(s)]_+ ds,$$

თუ $\beta = -||w_1||_C / ||w||_C$. შესაბამისად (2.88) უტოლობიდან უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{\mathbb{M}(u_\nu,\, w_1)}{|\beta|} \geq -\varepsilon\gamma_r ||w||_C + \int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_+ + f^-(s)[w(s)]_- \Big) ds + \int_a^b h_1(s) w(s) ds,$$

თუ $\nu \geq \nu_0,\ \beta > 0$, და

$$\frac{\mathbb{M}(u_\nu,\, w_1)}{|\beta|} \geq -\varepsilon\gamma_r ||w||_C + \int_a^b \Big(f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+ \Big) ds - \int_a^b h_1(s) w(s) ds,$$

თუ $\nu \geq \nu_0,\ \beta < 0$, საიდანაც (2.81) პირობის გათვალისწინებით დავრწმუნდებით (2.82) შეფასების სამართლიანობაში ნებისმიერი $\nu_1 \geq \nu_0$ რიცხვისთვის. $\square$

ახლა დაუმტკიცებლად განვიხილოთ შემდეგი ლემა (იხ. [27, ლემა 1.1]):

ლ ე მ ა 2.7. დავუშვათ $\widetilde{p}, p_\nu \in L(I;\mathbb{R}),\ v_0, v_\nu \in C(I;\mathbb{R})\ (\nu \in \mathbb{N})$,

$$\lim_{\nu\to+\infty} ||v_\nu - v_0||_C = 0, \qquad \limsup_{\nu\to+\infty} ||p_\nu||_L < +\infty,$$

და

$$\lim_{\nu\to+\infty} \int_a^t p_\nu(s)ds = \int_a^t \widetilde{p}(s)ds \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I.$$

მაშინ

$$\lim_{\nu\to+\infty} \int_a^t p_\nu(s)v_\nu(s)ds = \int_a^t \widetilde{p}(s)v_0(s)ds \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I. \tag{2.89}$$

ლ ე მ ა 2.8. დავუშვათ $p \in L(I;\mathbb{R}), g \in L(I;\mathbb{R}_0^+)$ არის 2.3 თეორემაში განსაზღვრული ფუნქციები და ფუნქცია $\widetilde{p} \in L(I;\mathbb{R})$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\begin{aligned} p(t) - g(t) \le \widetilde{p}(t) \le p(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I,\, k = 2, \\ p(t) \le \widetilde{p}(t) \le p(t) + g(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I,\, k = 1, 3. \end{aligned} \tag{2.90}$$

მაშინ მოიძებნება ისეთი $\rho_0 > 0$ რიცხვი, რომ

$$u^{(4)}(t) = \widetilde{p}(t)u(t) + q(t), \tag{2.91}$$

განტოლების ნებისმიერი u ამონახსნისთვის რომელიც აკმაყოფილებს (2.30_k) პირობებს, სამართლიანი იქნება შეფასება

$$||u||_C \le \rho_0 ||q||_L. \tag{2.92}$$

დამტკიცება. დავუშვათ 2.8 ლემა არ არის სამართლიანი. მაშინ ნებისმიერი $\nu \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $p_\nu, q_\nu \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციები, რომ

$$\begin{aligned} h_0(t) \le p_\nu(t) \le p(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I,\, k = 2, \\ p(t) \le p_\nu(t) \le h_0(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I,\, k = 1, 3, \end{aligned} \tag{2.93}$$

სადაც $h_0 := p + (-1)^{k+1}g$, და ამოცანას

$$u_\nu^{(4)}(t) = p_\nu(t)u_\nu(t) + q_\nu(t),$$

$$u_\nu^{(j_1-1)}(a) = 0\ (j_1 = 1,\dots,k), \qquad u_\nu^{(j_2-1)}(b) = 0\ (j_2 = 1,\dots,4-k),$$

ექნება ისეთი u_ν ამონახსნი, რომ შესრულდება $||u_\nu||_C \ge \nu||q_\nu||_L$. მაშინ თუ შემოვიღებთ

$$v_\nu(t) = u_\nu(t)/||u_\nu||_C \qquad \text{და} \qquad \widetilde{q}_\nu(t) = q_\nu(t)/||u_\nu||_C,$$

მივიღებთ

$$||v_\nu||_C = 1, \qquad ||\widetilde{q}_\nu||_L \le \frac{1}{\nu}, \tag{2.94}$$

და v_ν იქნება შემდეგი ამოცანის ამონახსნი

$$\begin{aligned} v_\nu^{(4)}(t) = p_\nu(t)v_\nu(t) + \widetilde{q}_\nu(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I, \\ v_\nu^{(j_1-1)}(a) = 0\ (j_1 = 1,\dots,k), \qquad &v_\nu^{(j_2-1)}(b) = 0\ (j_2 = 1,\dots,4-k), \end{aligned} \tag{2.95}$$

და ამდენად (2.93) და (2.94) პირობების ძალით გვექნება შეფასება

$$|v_\nu^{(4)}(t)| \le h(t) + |\widetilde{q}_\nu(t)| \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{2.96}$$

სადაც $h(t) = \max\{|h_0(t)|, |p(t)|\}$. მეორე მხრივ (2.95) სასაზღვრო პირობებიდან ცხადია ისეთი $c_{j,\nu} \in I$ წერტილების არსებობა, რომ $v_\nu^{(j)}(c_{j,\nu}) = 0$ $(j = 0,1,2,3)$, და ამიტომ ნებისმიერი t_1, $t_2 \in I$ წერტილებისთვის მივიღებთ შეფასებებს

$$v_\nu^{(j)}(c_{j,\nu}) = 0, \qquad |v_\nu^{(j)}(t_2) - v_\nu^{(j)}(t_1)| \le \Big| \int_{t_1}^{t_2} |v_\nu^{(j+1)}(s)|ds \Big| \, (j = 0,1,2,3).$$

აქედან (2.94) და (2.96) შეფასებების გათვალისწინებით ცხადია, რომ $\{v_\nu^{(j)}\}_{\nu=1}^{+\infty}$ $(j = 0,\dots,3)$ მიმდევრობები იქნება ერთობლივად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი I შუალედზე. ამდენად არცელა - ასკოლის ლემის თანახმად $\{v_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა, თავის წარმოებულებთან ერთად I შუალედზე თანაბრად კრებადი ქვემიმდევრობა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ თვით ეს $\{v_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$ მიმდევრობაა თანაბრად კრებადი. მაშინ მოიძებნება ისეთი $v_0 \in \widetilde{C}^3(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია, რომ

$$v_0^{(j)}(t) = \lim_{\nu \to +\infty} v_\nu^{(j)}(t) \, (j = 0,1,2,3) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I, \tag{2.97}$$

და მაშინ (2.94) გამოსახულებებიდან პირველის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$||v_0||_C = 1. \tag{2.98}$$

ახლა შემოვიღოთ $P_\nu \in \widetilde{C}(I;\mathbb{R})$ ფუნქციები $P_\nu(t) = \int_a^t p_\nu(s)ds$ ტოლობებით. მაშინ (2.93) უტოლობების გათვალისწინებით, როგორიც არ უნდა იყოს t_1, $t_2 \in I$ რიცხვები, გვექნება

$$\begin{aligned} &P_\nu(a) = 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} h_0(s)ds \le P_\nu(t_2) - P_\nu(t_1) \le \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds \qquad \text{თუ} \quad k = 2, \\ &P_\nu(a) = 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds \le P_\nu(t_2) - P_\nu(t_1) \le \int_{t_1}^{t_2} h_0(s)ds \qquad \text{თუ} \quad k = 1,3, \end{aligned} \tag{2.99}$$

და ამდენად $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$ მიმდევრობა გამოვა ერთობლივად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი I შუალედზე. მაშინ არცელა - ასკოლის ლემის ძალით, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ეს მიმდევრობა თანაბრად კრებადია. ასეთ შემთხვევაში მოიძებნება ისეთი $P \in C(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია, რომ

$$\lim_{\nu \to +\infty} P_\nu(t) = P(t) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I, \tag{2.100}$$

საიდანაც (2.99) გამოსახულებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს

$$P(a) = 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} h_0(s)ds \le P(t_2) - P(t_1) \le \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds \qquad \text{თუ} \quad k = 2,$$

$$P(a) = 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds \le P(t_2) - P(t_1) \le \int_{t_1}^{t_2} h_0(s)ds \qquad \text{თუ} \quad k = 1,3.$$

უკანასკნელი უტოლობებიდან ცხადია, რომ P არის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია. ამდენად $P(a) = 0$ პირობის ძალით მოიძებნება ისეთი ფუნქცია $\widetilde{p} \in L(I; \mathbb{R})$ რომ $P(t) = \int_a^t \widetilde{p}(s)ds$, და უკანასკნელი უტოლობებიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned} h_0(t) \le \widetilde{p}(t) \le p(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I,\, k = 2, \\ p(t) \le \widetilde{p}(t) \le h_0(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I,\, k = 1, 3. \end{aligned} \tag{2.101}$$

მაშინ (2.97) და (2.100) ტოლობებიდან 2.7 ლემით გამომდინარეობს რომ სრულდება (2.89) ტოლობა. ამიტომ თუ ვაინტეგრებთ (2.95) განტოლებას a-დან t-მდე და მიღებულ გამოსახულებაში გადავალთ ზღვარზე, (2.95) სასაზღვრო პირობების და (2.89), (2.94), (2.97) გამოსახულებების გათვალისწინებით დავრწმუნდებით, რომ v_0 არის

$$v_0^{(4)}(t) = \widetilde{p}(t)v_0(t),$$

$$v_0^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad v_0^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4-k),$$

ამოცანის ამონახსნი. მეორე მხრივ (2.33) განტოლების არარხევადობიდან და (2.101) უტოლობიდან 1.8 თეორემის ძალით თუ $k = 2$ და 1.9 თეორემის ძალით თუ $k = 1, 3$, გამომდინარეობს რომ $v_0 \equiv 0$, რაც ეწინააღმდეგება (2.98) ტოლობას. ამდენად ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და სამართლიანია (2.92) შეფასება. □

***ლ ე მ ა* 2.9.** ვთქვათ (2.4), (2.5_k) ამოცანას აქვს არატრივიალური ამონახსნი. მაშინ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი რომ

$$\begin{aligned} w^{(n)}(t) = \lambda p(t) w(t) \qquad &\text{თუ} \quad t \in I, \\ w^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad &w^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, n-k), \end{aligned} \tag{2.102}$$

ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი თუ $\lambda \in [1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon] \setminus \{1\}$.

დამტკიცება. ლემის სამართლიანობა პირდაპირ გამომდინარეობს 1.1 დებულებიდან. მართლაც 1.1 დებულებიდან ცხადია, რომ (2.4), (2.5_k) ამოცანის ვერცერთი საკუთარი რიცხვი ვერ იქნება სხვა საკუთარი რიცხვების მიმდევრობის დაგროვების წერტილი. ამიტომ ყოველ საკუთარ რიცხვს გააჩნია ისეთი მიდამო რომელში არცერთი სხვა საკუთარი რიცხვი არ შევა. მაშინ იმის აღნიშვნაღა დაგვრჩა, რომ რადგან (2.4), (2.5_k) ამოცანას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი, $\lambda = 1$ იქნება (2.102) ამოცანის საკუთარი რიცხვი, რაც საბოლოოდ ამტკიცებს ჩვენს ლემას. □

2.3 ძირითადი შედეგების დამტკიცება

2.1 თეორემის დამტკიცება. ნებისმიერი ნატურალური ν რიცხვისთვის შემოვიღოთ

$$\mu_{i,\nu} = 1 + \frac{(-1)^{i+n-k}}{\nu},$$

და I შუალედზე ნებისმიერი $\nu \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის განვიხილოთ ამოცანები

$$u_\nu^{(n)}(t) = \mu_{i,\nu} p(t) u_\nu(t) + f(t, u_\nu(t)) + h(t), \tag{2.103}$$

$$u_\nu^{(j_1-1)}(a)=0\ (j_1=1,\dots,k),\qquad u_\nu^{(j_2-1)}(b)=0\ (j_2=1,\dots,n-k), \tag{2.104$_k$}$$

და

$$w^{(n)}(t)=\mu_{i,\nu}p(t)w(t), \tag{2.105}$$

$$w^{(j_1-1)}(a)=0\ (j_1=1,\dots,k),\qquad w^{(j_2-1)}(b)=0\ (j_2=1,\dots,n-k). \tag{2.106$_k$}$$

2.9 ლემის თანახმად მოიძებნება $\nu_2\in\mathbb{N}$ ისეთი, რომ (2.105), (2.106_k) ამოცანას ექნება მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი თუ $\nu\ge\nu_2$. მაშინ (2.9) პირობიდან გამომდინარეობს (იხ. [27, თეორემა 2.1, გვ. 2268]), (2.103), (2.104_k) ამოცანის ამოხსნადობა თუ $\nu\ge\nu_2$. ვთქვათ u_ν არის (2.103), (2.104_k) ამოცანის რაიმე ამონახსნი და დავუშვათ

$$\lim_{\nu\to+\infty}||u_\nu||_C=+\infty. \tag{2.107}$$

მაშინ თუ შემოვიღებთ ფუნქციას $v_\nu(t)=u_\nu(t)||u_\nu||_C^{-1}$, დავინახავთ რომ ის იქნება

$$v_\nu^{(n)}(t)=\mu_{i,\nu}p(t)v_\nu(t)+\frac{1}{||u_\nu||_C}[f(t,u_\nu(t))+h(t)], \tag{2.108}$$

$$v_\nu^{(j_1-1)}(a)=0\ (j_1=1,\dots,k),\qquad v_\nu^{(j_2-1)}(b)=0\ (j_2=1,\dots,n-k), \tag{2.109$_k$}$$

ამოცანის ამონახსნი და

$$||v_\nu||_C=1\qquad \text{თუ}\quad \nu\ge\nu_2. \tag{2.110}$$

აგრეთვე როლის თეორემით (2.109_k) პირობებიდან გამომდინარეობს რომ ყოველი $v_\nu^{(j)}$ $(j=1,\dots,n-1)$ ფუნქცია ერთხელ მაინც განულდება რაღაც $c_{j,\nu}\in I$ წერტილში. მაშინ ამ $c_{j,\nu}$ და ნებისმიერი $t_1,\,t_2\in I$ წერტილებისთვის, როგორიც არ უნდა იყოს $\nu\ge\nu_2$, სამართლიანია

$$v_\nu^{(j)}(c_{j,\nu})=0,\qquad |v_\nu^{(j)}(t_2)-v_\nu^{(j)}(t_1)|\le\left|\int_{t_1}^{t_2}|v_\nu^{(j+1)}(s)|ds\right|\ (j=0,\dots,n-1). \tag{2.111}$$

უკანასკნელი გამოსახულებებიდან როდესაც $j=n-1$, ნებისმიერი $\nu\ge\nu_2$ რიცხვისთვის, (2.108) განტოლებისა და (2.110) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ შეფასებებს

$$|v_\nu^{(n-1)}(t_2)-v_\nu^{(n-1)}(t_1)|\le 2\left|\int_{t_1}^{t_2}|p(s)|ds\right|+\frac{1}{||u_\nu||_C}\int_a^b(f^*(s,\,||u_\nu||_C)+|h(s)|)ds,$$

$$||v_\nu^{(n-1)}||_C\le 2\int_a^b|p(s)|ds+\frac{1}{||u_\nu||_C}\int_a^b(f^*(s,\,||u_\nu||_C)+|h(s)|)ds.$$

აგრეთვე (2.107), (2.9) პირობებისა და ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის ძალით როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon_0>0$ მოიძებნება ისეთი $\delta_0>0$ და $\nu_3\ge\nu_2$, რომ შესრულდება უტოლობები

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}|p(s)|ds\right|\le\frac{\varepsilon_0}{4},\qquad \frac{1}{||u_\nu||_C}\int_a^b(f^*(s,\,||u_\nu||_C)+|h(s)|)ds\le\frac{\varepsilon_0}{2},$$

თუ $|t_2-t_1|\le\delta_0$ და $\nu\ge\nu_3$. უკანასკნელი უტოლობებიდან კი გამომდინარეობს $\{v_\nu^{(n-1)}\}_{\nu\ge\nu_3}^{+\infty}$ მიმდევრობის ერთობლივად შემოსაზღვრულობა და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტობა, ანუ მოიძებნება ისეთი $r_0>0$ მუდმივი, რომ

$$||v_\nu^{(n-1)}||_C\le r_0\qquad \text{თუ}\quad \nu\ge\nu_3.$$

ამ უკანასკნელი შეფასების (2.111) უტოლობაში გათვალისწინებით კი ადვილად დავ-რწმუნედბით $\{v_\nu^{(j)}\}_{\nu\ge\nu_3}^{+\infty}$ $(j=0,\dots,n-2)$ მიმდევრობების ერთობლივად შემოსაზღვრულობასა და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტობაში. ამდენად ჩვენ დავამტკიცეთ $\{v_\nu^{(j)}\}_{\nu\ge\nu_3}^{+\infty}$ $(j=0,\dots,n-1)$ მიმდევრობების ერთობლივად შემოსაზღვრულობა და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტობა და არცელა-ასკოლის ლემის თანახმად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ ეს მიმდევრობები თანაბრად კრებადია. ანუ მოიძებნება $w_1\in\widetilde{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\nu\to+\infty} v_\nu^{(j)}(t)=w_1^{(j)}(t)\ (j=0,\dots,n-1) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t\in I, \tag{2.112}$$

სადაც (2.110) ტოლობების ძალით $||w_1||_C=1$ და ამდენად w_1 არანულოვანი ფუნქციაა. აქედან და (2.107) ტოლობებიდან გამომდინარეობს ნატურალურ რიცხვთა ისეთი ზრდადი $\{\ell_\nu\}_{\nu\ge\nu_3}^{+\infty}$ მიმდევრობის არსებობა, რომ

$$||u_{\ell_\nu}||_C>2r\nu, \qquad ||v_{\ell_\nu}^{(j)}-w_1^{(j)}||_C\le\frac{1}{2\nu}\ (j=0,\dots,n-1) \qquad \text{თუ} \quad \nu>\nu_3. \tag{2.113}$$

სიმარტივისთვის, ზოგადობის დაურღვევლად, შემოვიღოთ აღნიშვნები $u_\nu\equiv u_{\ell_\nu}$ და $v_\nu\equiv v_{\ell_\nu}$. მაშინ u_ν და v_ν იქნება შესაბამისად (2.103), (2.104_k) და (2.108), (2.109_k) ამოცანების ამონახსნები, სადაც $\mu_{i,\nu}=1+\frac{(-1)^{i+n-k}}{\ell_\nu}$ და შესრულდება (2.57) და (2.58) უტოლობები. მაშინ თუ ცხად

$$v_\nu^{(n-1)}(t)-v_\nu^{(n-1)}(a)=\int_a^t\Big(\mu_{i,\nu}p(s)v_\nu(s)ds+\frac{1}{||u_\nu||_C}[f(s,u_\nu(s))+h(s)]\Big)ds,$$

ტოლობაში გადავალთ $\nu\to+\infty$ ზღვარზე, (2.107) ტოლობის და (2.9) პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ, რომ w_1 ფუნქცია არის წრფივი ერთგავროვანი (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი. $N_{p,n}=\emptyset$, პირობის თანახმად w_1 ფუნქციას არ გააჩნია ნულები I შუალედის შიგა წერტილებში, ანუ 1.1 დებულების თანახმად (იხ. გვ. 25) რიცხვი 1 არის $(2.4),(2.5_k)$ ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი. ასეთ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია 1 იქნება მისი შეუღლებული წრფივი ერთგვაროვანი $(2.4^*),(2.5_{n-k})$ ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვიც და მაშინ, როგორც ეს ისევ 1.1 დებულებიდან გამომდინარეობს $(2.4^*),(2.5_{n-k})$ ამოცანის არცერთ ამონახსნს არ ექნება ნული I შუალედის შიგა წერტილებში. ამიტომ არსებობს $(2.4^*),(2.5_{n-k})$ ამოცანის ისეთი w_2 ამონახსნი, რომელსაც იგივე ნიშანი აქვს I შუალედში რაც w_1 ფუნქციას, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესრულდება უტოლობა

$$w_1(t)w_2(t)>0 \qquad \text{თუ} \quad t\in\,]a,b[\,,$$

და ამდენად

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_a^b|p(s)|v_\nu(s)w_2(s)ds=\int_a^b|p(s)|w_1(s)w_2(s)ds>0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს ისეთი $\nu_3>\nu_2$ მუდმივის არსებობა, რომ

$$\int_a^b|p(s)|u_\nu(s)w_2(s)ds>0 \qquad \text{თუ} \quad \nu>\nu_3. \tag{2.114}$$

ახლა თუ (2.103) და (2.4^*) განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად w_2 და $(-1)^{n+1}u_\nu$ ფუნქციებზე და მიღებული გამოსახულებების ჯამს ვაინტეგრებთ a-დან b-მდე, მივიღებთ

$$\int_a^b [u_\nu^{(n)}(s)w_2(s) - (-1)^n w_2^{(n)}(s)u_\nu(s)]ds = \int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))]w_2(s)ds +$$

$$\frac{(-1)^{i+n-k}}{\ell_\nu}\int_a^b p(s)u_\nu(s)w_2(s)ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_3,$$

სადაც (2.104_k) და (2.5_{n-k}) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ნაწილობით ინტეგრება მოგვცემს

$$\int_a^b [u_\nu^{(n)}(s)w_2(s) - (-1)^n w_2^{(n)}(s)u_\nu(s)]ds = 0.$$

მაშინ წინა ტოლობიდან (2.3_k) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$(-1)^{i+1}\int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))]w_2(s)ds = \frac{1}{\ell_\nu}\int_a^b |p(s)|u_\nu(s)w_2(s)ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_3,$$

საიდანაც (2.114) პირობის ძალით ცხადია, რომ

$$(-1)^{i+1}\int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))]w_2(s)ds > 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_3. \tag{2.115}$$

ახლა აღვნიშნოთ, რომ $N_{p,n} = \emptyset$, (2.8_i), (2.10_i), (2.104_k) (ის რომ სრულდება (2.57), (2.58) პირობები უკვე ვაჩვენეთ) პირობების ძალით შესრულებულია 2.5 ლემის ყველა მოთხოვნა სადაც

$$f_1(t, x) = (-1)^i f(t, x) \qquad \text{და} \qquad h_1(t) = (-1)^i h(t).$$

ამდენად სამართლიანია (2.76) შეფასება, ანუ

$$(-1)^i\int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))]w_2(s)ds \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1. \tag{2.116}$$

რაც ეწინააღმდეგება (2.115) უტოლობას თუ $\nu \geq \max\{\nu_1, \nu_3\}$. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს რომ (2.107) დაშვება არ არის სამართლიანი და ამდენად $\{u_\nu^{(n-1)}\}_{\nu\geq\nu_2}^{+\infty}$ მიმდევრობას გააჩნია შემოსაზღვრული ქვემიმდევრობა. მაშინ ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ ისეთი $r_1 > 0$ მუდმივის არსებობა, რომ $||u_\nu||_C \leq r_1$ თუ $\nu \geq \nu_2$, და ასეთ შემთხვევაში (2.103) განტოლებიდან გამომდინარეობს შეფასება

$$|u_\nu^{(n)}(t)| \leq \sigma(t) := 2|p(t)|r_1 + |h(t)| + f^*(t, r_1) \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_2. \tag{2.117}$$

აგრეთვე როლის თეორემით (2.104_k) პირობებიდან გამომდინარეობს რომ ყოველი $u_\nu^{(j)}$ $(j = 1, \dots, n-1)$ ფუნქცია ერთხელ მაინც განულდება რაღაც $c'_{j,\nu} \in I$ წერტილში. მაშინ ამ $c'_{j,\nu} \in I$ და ნებისმიერი t_1, $t_2 \in I$ წერტილებისთვის, როგორიც არ უნდა იყოს $\nu \geq \nu_2$, სამართლიანია

$$u_\nu^{(j)}(c'_{j,\nu}) = 0, \qquad |u_\nu^{(j)}(t_2) - u_\nu^{(j)}(t_1)| \leq \left|\int_{t_1}^{t_2} |u_\nu^{(j+1)}(s)|ds\right| \; (j = 0, \dots, n-1).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (2.117) შეფასებებს, $\{v_\nu\}_{\nu\geq\nu_2}^{+\infty}$ მიმდევრობის შემთხვევაში ჩატარებული მსჯელობის გამეორებით, დავრწმუნდებით რომ $\{u_\nu^{(j)}\}_{\nu\geq\nu_2}^{+\infty}$ $(j = 0, \dots, n-1)$

მიმდევრობები არის ერთობლივად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი. ამდენად, არცელა - ასკოლის ლემის თანახმად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ ეს მიმდევრობები თანაბრად კრებადია. ანუ მოიძებნება $u_0 \in \widetilde{C}^{n-1}(I;\, \mathbb{R})$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\nu\to+\infty} u_\nu^{(j)}(t) = u_0^{(j)}(t)\ (j=0,\dots,n-1) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t\in I. \tag{2.118}$$

(2.104_k) პირობებიდან უკანასკნელი ტოლობის ძალით ცხადია, რომ u_0 ფუნქცია დააკმაყოფილებს (2.2_k) სასაზღვრო პირობებს. მაშინ თუ (2.103) განტოლებას ვაინტეგრებთ a-დან t-მდე, და მიღებულ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როდესაც $\nu\to+\infty$, უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით დავრწმუნდებით, რომ u_0 არის (2.1), (2.2_k) ამოცანის ამონახსნი. □

2.1 შედეგის დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $h\in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციისთვის სრულდება 2.1 თეორემის (2.8_i) და (2.10_i) პირობები, სადაც w არის (2.4*), (2.5_{n-k}) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი, რამეთუ ამ თეორემის დანარჩენი პირობების სამართლიანობა პირდაპირაა მოთხოვნილი შედეგში. ამისთვის ნებისმიერად დავაფიქსიროთ $h\in L(I;\mathbb{R})$ და შემოვიღოთ ფუნქციები

$$f^+(t)=\begin{cases} c & \text{თუ} \ \ t\in I^+\\ 0 & \text{თუ} \ \ t\in I\setminus I^+\end{cases}, \qquad f^-(t)=\begin{cases} c & \text{თუ} \ \ t\in I^-\\ 0 & \text{თუ} \ \ t\in I\setminus I^-\end{cases}, \tag{2.119}$$

სადაც $c\in\mathbb{R}^+$. მაშინ რადგან I^-, I^+ სიმრავლეები დადებითი ზომისაა, მოცემული h და w ფუნქციებისათვის c მუდმივი შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე რომ შესრულდეს უტოლობა

$$-c\int_{I^-}|w(s)|ds < (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)|w(s)|ds < c\int_{I^+}|w(s)|ds. \tag{2.120}$$

მეორე მხრივ (2.12) და (2.13) პირობებიდან ცხადია, რომ მოიძებნება $r>r_0$ ისეთი, რომ შესრულდება უტოლობები

$$(-1)^i f(t,x) < -c \quad \text{თუ} \ \ t\in I^-, \ \ x\le -r,$$

$$(-1)^i f(t,x) < 0 \quad \text{თუ} \ \ t\in I\setminus I^-, \ \ x< -r,$$

და

$$(-1)^i f(t,x) > c \quad \text{თუ} \ \ t\in I^+, \ \ x> r,$$

$$(-1)^i f(t,x) \ge 0 \quad \text{თუ} \ \ t\in I\setminus I^+, \ \ x> r.$$

მაშინ f^-, f^+ ფუნქციების შემოღების (2.119) წესის თანახმად ცხადია, რომ სრულდება (2.8_i) პირობები და მეტიც (2.120) უტოლობა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით,

$$-\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds < (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)|w(s)|ds < \int_a^b f^+(s)|w(s)|ds.$$

ახლა თუ შერჩეული r მუდმივისთვის შემოვიღებთ

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\gamma_r||w||_C}\Big((-1)^{i+1}\int_a^b h(s)|w(s)|ds+\int_a^b f^-(s)|w(s)|ds\Big),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\gamma_r ||w||_C}\Big(\int_a^b f^+(s)|w(s)|ds - (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)|w(s)|ds\Big),$$

ადვილად დავრწმუნდებით რომ უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (2.10_i) პირობის სამართლიანობაც, სადაც $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\} > 0$, რაც საბოლოოდ ამტკიცებს ჩვენი შედეგის სამართლიანობას. □

2.2 თეორემის დამტკიცება. 2.2 თეორემის დამტკიცება ანალოგიურია 2.1 თეორემის დამტკიცების იმ ძირითადი განსხვავებით, რომ 2.5 ლემის ნაცვლად გამოვიყენებთ 2.6 ლემას.

მართლაც, გავყვეთ 2.1 თეორემის დამტკიცებას სადაც $\mu_{i,\nu}$ მუდმივს განვსაზღვრავთ ტოლობით

$$\mu_{i,\nu} = 1 + \frac{(-1)^{i+m}}{\nu},$$

და განვიხილოთ (2.103), (2.104_k) და (2.105), (2.106_k) ამოცანები სადაც $n = 2m$, $k = m$. მაშინ 2.9 ლემის ძალით მოიძებნება $\nu_2 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ (2.105), (2.106_k) ამოცანას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი გააჩნია თუ $\nu > \nu_2$, და ამდენად (2.103), (2.104_k) ამოცანას ექნება ერთი მაინც u_ν ამონახსნი თუ $\nu > \nu_2$. დავუშვათ რომ სრულდება (2.107) ტოლობა და შემოვიღოთ

$$v_\nu = u_\nu ||u_\nu||_C^{-1},$$

ფუნქციები, რომლებიც იქნება (2.108), (2.109_k) ($n = 2m$, $k = m$) ამოცანის ამონახსნები. ისევე როგორც 2.1 თეორემის დამტკიცებისას, დავრწმუნდებით რომ $\{v_\nu^{(j)}\}_{\nu=1}^{+\infty}$ ($j = 1, \dots, n-1$) მიმდევრობები იქნება ერთობლივად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი. მაშინ არცელა - ასკოლის ლემის ძალით, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ რომ სრულდება (2.112) ტოლობები და (2.57), (2.58) უტოლობები და რომ w_1 არის ერთგვაროვანი (2.4), (2.5_k) ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი. დავუშვათ ახლა, რომ w არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის ნებისმიერი არანულოვანი ამონახსნი, მაშინ როგორც ეს 2.3 შენიშვნიდან გამომდინარეობს w და w_1 იქნება (2.4), (2.5_k) ამოცანის წრფივად დამოკიდებული ამონახსნები. ამიტომ შესაძლებელია w ამონახსნი ისე შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს

$$w_1(t)w(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a,\, b[\,,$$

უტოლობა. აგრეთვე (2.4), (2.5_k) ამოცანის თვითშეუღლებულობის გამო (რადგან $n = 2m$ და $k = m$) ცხადია, რომ შესრულდება ტოლობა

$$\int_a^b [u_\nu^{(2m)}(s)w(s) - w^{(2m)}(s)u_\nu(s)]ds = 0.$$

ახლა თუ (2.103) და (2.4) განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად w და $-u_\nu$ ფუნქციებზე და მიღებული გამოსახულებების ჯამს ვაინტეგრებთ a-დან b-მდე, 2.1 თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად, ყოველივე ნათქვამიდან გამომდინარეობს ისეთი $\nu_3 > \nu_2$ მუდმივის არსებობა, რომ სამართლიანი იქნება

$$(-1)^{i+1}\int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))]w_1(s)ds > 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_3 \tag{2.121}$$

შეფასება. მეორე მხრივ ადვილი შესამოწმებელია, რომ დაცული იქნება 2.6 ლემის ყველა პირობა, სადაც

$$f_1(t,x) = (-1)^i f(t,x) \qquad \text{და} \qquad h_1(t) = (-1)^i h(t),$$

და ამდენად სამართლიანი იქნება (2.82), ანუ იგივე

$$(-1)^i \int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))] w_1(s) ds \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1,$$

შეფასება, რაც ეწინააღმდეგება (2.121) შეფასებას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს რომ ჩვენი დაშვება (2.107) ტოლობის სამართლიანობის შესახებ მცდარია. მაშინ 2.1 თეორემის დამტკიცებაში მოყვანილი შესაბამისი მსჯელობის სიტყვასიტყვით გამეორებით დავრწმუნდებით ისეთი $u_0 \in \widetilde{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$ ფუნქციის არსებობაში, რომ შესრულდება (2.118) ტოლობა, საიდანაც გამომდინარეობს რომ u_0 იქნება (2.16), (2.17) ამოცანის ამონახსნი.

$\square$

2.2 შედეგის დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $h \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქციისთვის სრულდება 2.2 თეორემის (2.8_i) და (2.23_i) პირობები, სადაც w არის (2.4), (2.5_k) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი, რამეთუ ამ თეორემის დანარჩენი პირობების სამართლიანობა პირდაპირაა მოთხოვნილი შედეგში.

ნებისმიერად დავაფიქსიროთ $h \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია და შემოვიღოთ $f^{\pm}$ ფუნქციები (2.119) ტოლობებით, სადაც c დადებითი რიცხვია. მაშინ მოცემული h და w ფუნქციებისათვის (2.26) უტოლობების ძალით, c მუდმივი შეგვიძლია ავიღოთ საკმარისად დიდი იმისთვის რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\begin{gathered} -c\int_{I^+}[w(s)]_- ds - c\int_{I^-}[w(s)]_+ ds < (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds < \\ c\int_{I^-}[w(s)]_- ds + c\int_{I^+}[w(s)]_+ ds. \end{gathered} \tag{2.122}$$

იმის დამტკიცება, რომ ასე შემოღებული f^-, f^+ ფუნქციებისთვის (2.24_i) და (2.25) პირობებიდან გამომდინარეობს ისეთი $r > r_0$ მუდმივის არსებობა რომ შესრულდება (2.8_i) პირობები, ანალოგიურია 2.1 შედეგში მოყვანილი დამტკიცების.

აგრეთვე f^-, f^+ ფუნქციების შემოღების წესის თანახმად სამართლიანია ტოლობები

$$\int_a^b (f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+) ds = c\int_{I^+}[w(s)]_- ds + c\int_{I^-}[w(s)]_+ ds,$$

და

$$\int_a^b (f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+) ds = c\int_{I^-}[w(s)]_- ds + c\int_{I^+}[w(s)]_+ ds,$$

და ამიტომ (2.122) უტოლობა შემდეგნაირად გადაიწერება

$$-\int_a^b (f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+) ds < (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds <$$

$$< \int_a^b (f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+) ds.$$

ახლა თუ შერჩეული r მუდმივისთვის შემოვიღებთ

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\gamma_r||w||_C}\Big((-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds + \int_a^b (f^+(s)[w(s)]_- + f^-(s)[w(s)]_+)ds\Big),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\gamma_r||w||_C}\Big(\int_a^b (f^-(s)[w(s)]_- + f^+(s)[w(s)]_+)ds - (-1)^{i+1}\int_a^b h(s)w(s)ds\Big),$$

ადვიდალ დავრწმუნდებით რომ წინა უტოლობიდან გამომდინარეობს (2.23_i) პირობის სამართლიანობაც, სადაც $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\} > 0$, რაც საბოლოოდ ამტკიცებს ჩვენს შედეგს.
□

2.3 შედეგის დამტკიცება. დავუშვათ w არის (2.18), (2.19) ამოცანის რაიმე არანულოვანი ამონახსნი, მაშინ რაკი I_0 არის დადებითი ზომის სიმრავლე, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\int_{I_0}[w(s)]_+ds \neq 0.$$

მაშინ თუ შემოვიღებთ $I^- = I^+ = I_0$, ცხადია რომ შესრულდება (2.26) უტოლობები. აგრეთვე ასეთ შემთხვევაში (2.27) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (2.25) ტოლობების სამართლიანობაც. ამდენად შესრულებული იქნება 2.2 შედეგის ყველა პირობა, საიდანაც გამომდინარეობს ჩვენი შედეგის სამართლიანობა. □

2.3 თეორემის დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $k = 2$, და ნებისმიერი $t \in I$ რიცხვისთვის შემოვიღოთ

$$H(t,\, x) = \begin{cases} 0 & \text{თუ} \quad |x| > r \\ f(t,\, x) & \text{თუ} \quad |x| \leq r \end{cases}, \qquad q^*(t) = \max\{|H(t,\, x)| : x \in R\},$$

და

$$F_-(t,\, x) = \begin{cases} \frac{[f(t,x)\operatorname{sgn} x]_-}{|x|} & \text{თუ} \quad |x| > r \\ 0 & \text{თუ} \quad |x| \leq r \end{cases},$$

$$F_+(t,\, x) = \begin{cases} [f(t,\, x)\operatorname{sgn} x]_+ \operatorname{sgn} x & \text{თუ} \quad |x| > r \\ 0 & \text{თუ} \quad |x| \leq r \end{cases}.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$f(t,\, x) = F_+(t,\, x) - F_-(t,\, x)x + H(t,\, x) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.123}$$

სადაც (2.34_k) პირობის თანახმად სამართლიანია შეფასება

$$0 \leq F_-(t,\, x) \leq g(t), \quad |F_+(t,\, x)| \leq \delta(t, |x|) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.124}$$

აგრეთვე (2.35) პირობიდან გამომდინარეობს ისეთი $r_0 > r$ მუდმივის არსებობა, რომ

$$\rho_0\Big(||q^*||_L + \int_a^b[\delta(s,\, \rho) + |h(s)|]ds\Big) < \rho \qquad \text{თუ} \quad \rho \geq r_0, \tag{2.125}$$

სადაც ρ_0 არის 2.8 ლემაში შემოღებული მუდმივი. ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$u(t) = F(u)(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{2.126}$$

სადაც

$$F(u)(t) = \chi(||u||_C) \int_a^b G(t, s)[f(s, u(s)) + h(s)]ds,$$

G არის (2.31), (2.32_k) ამოცანის გრინის ფუნქცია და ფუნქცია $\chi : \mathbb{R}_0^+ \to [0, 1]$ განისაზღვრება ტოლობით

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{თუ} \quad 0 \le x \le r_0 \\ 2 - \frac{x}{r_0} & \text{თუ} \quad r_0 < x < 2r_0 \\ 0 & \text{თუ} \quad x \ge 2r_0 \end{cases}.$$

აგრეთვე $G, \partial G/\partial t$ ფუნქციების უწყვეტობიდან ცხადია, რომ F ოპერატორს $C(I; \mathbb{R})$ სივრცე გადაჰყავს მის კომპაქტურ

$$\{z \in C'(I; \mathbb{R}) : ||z||_C \le r_1, \ ||z'||_C \le r_2\},$$

ქვესიმრავლეში, სადაც

$$r_\ell = \max_{a \le s, t \le b} \Big| \frac{\partial^{\ell-1} G(t, s)}{\partial t^{\ell-1}} \Big| \int_a^b [f^*(s, 2r_0) + |h(s)|]ds \ (\ell = 1, 2).$$

მაშინ შაუდერის პრინციპის (იხ. [25]) ძალით (2.126) განტოლებას გააჩნია $u \in C(I; \mathbb{R})$ ამონახსნი. მაგრამ გრინის ფუნქციის განსაზღვრების თანახმად ცხადია, რომ u დააკმაყოფილებს (2.30_k) სასაზღვრო პირობებს და იქნება

$$u^{(4)}(t) = \chi(||u||_C) \, [p(t)u(t) + f(t, u(t)) + h(t)] \qquad \text{თუ} \quad t \in I,$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც (2.123) წარმოდგენიდან გამომდინარე შეიძლება (2.91) განტოლების სახით გადაიწეროს, სადაც

$$\widetilde{p}(t) = \chi(||u||_C) \, [p(t) - F_-(t, u(t))],$$

$$q(t) = \chi(||u||_C) \, [F_+(t, u(t)) + H(t, u(t)) + h(t)].$$

აგრეთვე (2.124) უტოლობებიდან და იმ გარემოებიდან, რომ δ ფუნქცია არაკლებადია მეორე არგუმენტის მიხედვით, გამომდინარეობს (2.90) და

$$|q(t)| \le \delta(t, ||u||_C) + q^*(t) + |h(t)| \qquad \text{თუ} \quad t \in I$$

შეფასებები. ამდენად დაცული იქნება 2.8 ლემის ყველა პირობა, საიდანაც გამომდინარეობს

$$||u||_C \le \rho_0 \Big(||q^*||_L + \int_a^b [\delta(s, ||u||_C) + |h(s)|]ds \Big)$$

შეფასების სამართლიანობა. მაშინ თუ დავუშვებთ, რომ $||u||_C > r_0$, მივიღებთ წინააღმდეგობას (2.125) უტოლობასთან. ამდენად $||u||_C \le r_0$, და (2.126) ტოლობის ოთხჯერ გაწარმოებით და χ ფუნქციის განსაზღვრების გათვალისწინებით მივიღებთ რომ u არის (2.29), (2.30_k) ამოცანის ამონახსნი.

დავუშვათ ახლა $k=1$ ან $k=3$, და განვსაზღვროთ $F_\pm, \widetilde{p}, q$ ფუნქციები ტოლობებით

$$F_-(t,\,x)=\begin{cases}[f(t,\,x)\operatorname{sgn}x]_-\operatorname{sgn}x & \text{თუ}\quad |x|>r\\ 0 & \text{თუ}\quad |x|\le r\end{cases},$$

$$F_+(t,\,x)=\begin{cases}\frac{[f(t,x)\ \operatorname{sgn}x]_+}{|x|} & \text{თუ}\quad |x|>r\\ 0 & \text{თუ}\quad |x|\le r\end{cases},$$

$$\widetilde{p}(t)=\chi(||u||_C)\,[p(t)+F_+(t,\,u(t))],$$

$$q(t)=\chi(||u||_C)\,[F_-(t,\,u(t))+H(t,\,u(t))+h(t)],$$

მაშინ

$$f(t,\,x)=F_+(t,\,x)x-F_-(t,\,x)+H(t,\,x)\qquad\text{თუ}\quad t\in I,\ x\in\mathbb{R},$$

და (2.34_k) პირობის ძალით გვექნება შეფასებები

$$0\le F_+(t,\,x)\le g(t),\quad |F_-(t,\,x)|\le\delta(t,|x|)\qquad\text{თუ}\quad t\in I,\ x\in\mathbb{R}.$$

ახლა ამ ახლად შემოღებული ფუნქციებით, $k=2$ შემთხვევაში ჩატარებული მსჯელობის სიტყვასიტყვით გამეორებით, საბოლოოდ დავამტკიცებთ ჩვენ თეორემას.

$\square$

2.4 (2.5) თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ (2.29), (2.30_k) ამოცანას გააჩნია ორი განსხვავებული ამონახსნი u_1 და u_2, ანუ $u_1\not\equiv u_2$. მაშინ შემოვიღოთ $u=u_1-u_2$, და

$$p_0(t)=\begin{cases}\frac{[f(t,x_1)-f(t,x_2)]\operatorname{sgn}u(t)}{|u(t)|} & \text{თუ}\quad u(t)\ne 0\\ -p(t) & \text{თუ}\quad u(t)=0\end{cases}.$$

ადვილი დასანახია, რომ u აკმაყოფილებს (2.30_k) სასაზღვრო პირობას და

$$u^{(4)}(t)=(p(t)+p_0(t))u(t)\tag{2.127}$$

განტოლების ამონახსნია, სადაც (2.37_1) პირობიდან თუ $k=2$ გამომდინარეობს უტოლობა

$$p(t)+p_0(t)<p^*(t)\qquad\text{თუ}\quad t\in I,$$

და (2.37_2) პირობიდან თუ $k=1$ ან $k=3$ გამომდინარეობს უტოლობა

$$p(t)+p_0(t)>p_*(t)\qquad\text{თუ}\quad t\in I.$$

მაშინ 1.12 შედეგიდან თუ $k=2$ და 1.13 შედეგიდან თუ $k=1$ ან $k=3$, გამომდინარეობს რომ (2.127), (2.30_k) ამოცანას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი გააჩნია, და ამდენად $u_1\equiv u_2$. $\square$

2.6 თეორემის დამტკიცება. ნებისმიერი $\nu \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის შემოვიღოთ p_ν ფუნქციები ტოლობით

$$p_\nu(t) \equiv \Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) p(t).$$

$p \in D_\pm(I)$ ჩართვის გამო ცხადია რომ $p \not\equiv 0$, და ამდენად სამართლიანია უტოლობები

$$[p_\nu(t)]_+ \preccurlyeq p(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ k = 2,\ \nu \in \mathbb{N},$$

$$-[p_\nu(t)]_- \succcurlyeq p(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ k = 1 \ \text{ან} \ k = 3,\ \nu \in \mathbb{N},$$

საიდანაც 1.1 თეორემის ძალით თუ $k = 2$ და 1.3 თეორემის ძალით თუ $k = 1$ ან $k = 3$, გამომდინარეობს რომ (2.33) განტოლებები არარხევადია. მეორე მხრივ ჩვენი თეორემის (2.42) პირობიდან ცხადია, რომ

$$-g(t)|x| \le (-1)^k f(t,\, x) \operatorname{sgn} x \le -\min\{f^-(t),\, f^+(t)\} \le 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ |x| > r. \tag{2.128}$$

ამდენად ნებისმიერი $\nu \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის სრულდება 2.3 თეორემის ყველა მოთხოვნა თუ $\delta(t,\, x) \equiv 0$, საიდანაც გამომდინარეობს რომ

$$u_\nu^{(4)}(t) = p_\nu(t) u_\nu(t) + f(t, u_\nu(t)) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{2.129}$$

$$u_\nu^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad u_\nu^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4-k), \tag{2.130}$$

ამოცანას ექნება ერთი მაინც u_ν ამონახსნი. აგრეთვე (2.128) უტოლობის ძალით სამართლიანია შეფასება

$$|f(t,\, x)| \le f^*(t,\, r) + g(t)|x| \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.131}$$

ახლა დავუშვათ, რომ სრულდება ტოლობა

$$\lim_{\nu \to +\infty} ||u_\nu||_C = +\infty, \tag{2.132}$$

და შემოვიღოთ ფუნქციები $v_\nu(t) = u_\nu(t) ||u_\nu||_C^{-1}$. ცხადია, რომ

$$||v_\nu||_C = 1 \qquad \text{თუ} \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{2.133}$$

და v_ν არის

$$v_\nu^{(4)}(t) = [p_\nu(t) + p_0(t, u_\nu(t))] v_\nu(t) + \frac{1}{||u_\nu||_C} p_1(t, u_\nu(t)), \tag{2.134}$$

$$v_\nu^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad v_\nu^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4-k), \tag{2.135}$$

ამოცანის ამონახსნი, სადაც

$$p_0(t,x) = \frac{1}{|x|+1} f(t,x) \operatorname{sgn} x, \qquad p_1(t,x) = h(t) + \frac{1}{|x|+1} f(t,x).$$

p_0 და p_1 ფუნქციებისთვის (2.131) უტოლობის გათვალისწინებით ტრივიალური მისაღებია შემდეგი შეფასებები

$$\begin{gathered} |p_0(t,\, x)| \le \sigma_0(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ \ x \in \mathbb{R}, \\ |p_1(t,\, x)| \le \sigma_0(t) + |h(t)| \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ \ x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{2.136}$$

სადაც $\sigma_0(t) := f^*(t, r) + g(t)$. აგრეთვე როლის თეორემით (2.135) პირობებიდან გამომდინარეობს რომ ყოველი $v_\nu^{(j)}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ ფუნქცია ერთხელ მაინც განულდება რაღაც $c_{j,\nu} \in I$ წერტილში. მაშინ ამ $c_{j,\nu} \in I$ და ნებისმიერი $t_1,\, t_2 \in I$ წერტილებისთვის, როგორიც არ უნდა იყოს $\nu \in \mathbb{N}$, სამართლიანია

$$v_\nu^{(j)}(c_{j,\nu}) = 0, \qquad |v_\nu^{(j)}(t_2) - v_\nu^{(j)}(t_1)| \leq \Big| \int_{t_1}^{t_2} |v_\nu^{(j+1)}(s)| ds \Big| \; (j = 0, 1, 2, 3),$$

საიდანაც (2.133) ტოლობის, (2.134) განტოლებისა და (2.136) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|v_\nu^{(3)}(t_2) - v_\nu^{(3)}(t_1)| \leq \Big| \int_{t_1}^{t_2} (\sigma_0(s) + |p(s)|) ds \Big| + \frac{1}{||u_\nu||_C} \int_a^b (\sigma_0(s) + |h(s)|) ds,$$

$$||v_\nu^{(3)}||_C \leq \int_a^b (\sigma_0(s) + |p(s)|) ds + \frac{1}{||u_\nu||_C} \int_a^b (\sigma_0(s) + |h(s)|) ds.$$

მაშინ (2.132) ტოლობის გათვალისწინებით, 2.2 თეორემის დამტკიცების ანალოგიური გზით, დავრწმუნდებით რომ $\{v_\nu^{(j)}\}_{\nu=1}^{+\infty}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ მიმდევრობები ერთობლივად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტია და არცელა-ასკოლის ლემის ძალით, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ

$$\lim_{\nu \to +\infty} v_\nu^{(j)}(t) = w_1^{(j)}(t) \; (j = 0, 1, 2, 3) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I, \tag{2.137}$$

და ისევე, როგორც 2.2 თეორემის დამტკიცებაში, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$||u_\nu||_C \geq 2r\nu, \qquad ||v_\nu^{(j)} - w_1^{(j)}||_C \leq 1/2\nu \; (j = 0, 1, 2, 3) \tag{2.138}$$

და $p_\nu(t) = (1 - \frac{1}{\ell_\nu}) p(t)$, სადაც $\{\ell_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$ ზრდადი მიმდევრობაა. მაშინ შესრულებული იქნება 2.4 ლემის ყველა პირობა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $m \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის თუ $m > \frac{1}{\delta_0}$ მოიძებნება $\nu_m \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ სრულდება

$$I_{\frac{1}{m}} := \Big[a + \frac{1}{m}, \;\; b - \frac{1}{m}\Big] \subset A_{\nu,1} \qquad \text{თუ} \quad \nu \geq \nu_m.$$

ამიტომ $A_{\nu,1}$ სიმრავლის განსაზღვრების თანახმად

$$|u_\nu(t)| > r \qquad \text{თუ} \quad t \in I_{\frac{1}{m}}, \; \nu \geq \nu_m. \tag{2.139}$$

ახლა შევაფასოთ $(-1)^k p_0$ ფუნქცია. თუ გავითვალისწინებთ (2.128) უტოლობებს მაშინ გვექნება

$$0 \geq (-1)^k p_0(t, x) \geq -g(t) \frac{|x|}{|x| + 1} \geq -g(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \; |x| > r,$$

საიდანაც (2.139) პირობის გათვალისწინებით ნებისმიერი ნატურალური $m > \frac{1}{\delta_0}$ რიცხვისთვის გვექნება შეფასება

$$-g(t) \leq (-1)^k p_0(t, u_{\nu_m}(t)) \leq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I_{\frac{1}{m}}, \; k = 1, 2, 3. \tag{2.140}$$

ახლა ნებისმიერი ნატურალური $m > \frac{1}{\delta_0}$, $k = 1, 2, 3$, რიცხვებისთვის $P_{k,m} \in C(I;\mathbb{R})$ ფუნქციები შემოვიღოთ ტოლობებით

$$P_{k,m}(t) = (-1)^k \cdot \begin{cases} \int_c^{a+1/m} p_0(s, u_{\nu_m}(s))ds & \text{თუ} \quad a \le t < a + \frac{1}{m} \\ \int_c^t p_0(s, u_{\nu_m}(s))ds & \text{თუ} \quad t \in I_{\frac{1}{m}} \\ \int_c^{b-1/m} p_0(s, u_{\nu_m}(s))ds & \text{თუ} \quad b - \frac{1}{m} < t \le b \end{cases},$$

სადაც $c = \frac{a+b}{2}$. ნებისმიერი $t_1, t_2 \in I$ $(t_2 > t_1)$ რიცხვებისთვის, (2.140) შეფასებიდან გვექნება

$$P_{k,m}(c) = 0, \quad -\int_{t_1}^{t_2} g(s)ds \le P_{k,m}(t_2) - P_{k,m}(t_1) \le 0 \qquad \text{თუ} \quad m > \frac{1}{\delta_0}, \ k = 1, 2, 3,$$

საიდანაც ცხადია $\{P_{k,m}\}_{m>\frac{1}{\delta_0}}^{+\infty}$ მიმდევრობების ერთობლივად შემოსაზღვრულობა და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტობა და არცელა-ასკოლის ლემის ძალით, ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს მიმდევრობები თანაბრად კრებადია. ამდენად მოიძებნება $P_k \in C(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to+\infty} P_{k,m}(t) = P_k(t) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I, \ k = 1, 2, 3. \tag{2.141}$$

მაშინ წინა გამოსახულებებში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ, რომ

$$-\int_{t_1}^{t_2} g(s)ds \le P_k(t_2) - P_k(t_1) \le 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს P_k ფუნქციის აბსოლუტურად უწყვეტობა და ამდენად მოიძებნება $\widetilde{p}_k \in L(I;\mathbb{R})$ ფუნქცია, ისეთი, რომ $P_k(t) = (-1)^k \int_c^t \widetilde{p}_k(s)ds$ თუ $t \in I, \ k = 1, 2, 3,$ და წინა უტოლობის თანახმად სამართლიანი იქნება შეფასება

$$P_k(c) = 0, \qquad -g(t) \le (-1)^k \widetilde{p}_k(t) \le 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \ k = 1, 2, 3. \tag{2.142}$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ $\{v_{\nu_m}^{(j)}\}_{m\ge 1/\delta_0}^{+\infty}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ მიმდევრობა არის კრებადი $\{v_{\nu}^{(j)}\}_{\nu=1}^{+\infty}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა და ამიტომ (2.137) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{m\to+\infty} v_{\nu_m}^{(j)}(t) = w_1^{(j)}(t) \ (j = 0, 1, 2, 3) \qquad \text{თანაბრად თუ} \quad t \in I, \tag{2.143}$$

ისევე როგორც (2.132) ტოლობიდან და (2.136) შეფასებიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{||u_{\nu_m}||_C} \int_c^t p_1(s, u_{\nu_m}(s))ds = 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I \tag{2.144}$$

ტოლობის სამართლიანობა. ამიტომ, თუ (2.134) $(\nu = \nu_m)$ განტოლების c-დან t-მდე ინტეგრებით მიღებულ ტოლობაში 2.7 ლემის გათვალისწინებით გადავალთ ზღვარზე როდესაც $m \to +\infty$, (2.141), (2.143) და (2.144) ტოლობების და (2.135) სასაზღვრო პირობების ძალით მივიღებთ რომ w_1 ფუნქცია არის

$$\begin{gathered} w_1^{(4)}(t) = (p(t) + \widetilde{p}(t))w_1(t), \\ w_1^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad w_1^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4-k) \end{gathered} \tag{2.145}$$

ამოცანის ამონახსნი, სადაც (2.133) ტოლობებიდან ცხადია, რომ

$$||w_1||_C = 1. \tag{2.146}$$

დავუშვათ $\widetilde{p} \not\equiv 0$. იმის გათვალისწინებით რომ (2.41) უტოლობა მკაცრია, (2.142) უტოლობებიდან გამომდინარეობს შეფასებები

$$[p(t) + \widetilde{p}(t)]_+ \preccurlyeq p(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ k = 2,$$

$$p(t) \preccurlyeq -[p(t) + \widetilde{p}(t)]_- \qquad \text{თუ} \quad t \in I,\ k = 1 \ \text{ან} \ k = 3.$$

უკანასკნელი უტოლობებიდან (2.40) ჩართვის ძალით 1.12 შედეგიდან თუ $k = 2$ და 1.13 შედეგიდან თუ $k = 1$ ან $k = 3$, მივიღებთ რომ (2.145) ამოცანას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი გააჩნია, რაც ეწინააღმდეგება (2.146) ტოლობას, ე.ი. ჩვენი დაშვება ყოფილა მცდარი და $\widetilde{p}(t) \equiv 0$. ასეთ შემთხვევაში გამოვა, რომ w_1 არის

$$\begin{gathered} w_1^{(4)}(t) = p(t)w_1(t), \\ w_1^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad w_1^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, 4-k) \end{gathered} \tag{2.147}$$

ამოცანის ამონახსნი და (2.40) ჩართვის გამო ცხადია, რომ w_1 იქნება ნიშანმუდმივი ფუნქცია რაც იმას ნიშნავს, რომ $N_{p,4} = \emptyset$. მაშინ 2.1 თეორემაში ჩატარებული მსჯელობის გამეორებით მივიღებთ, რომ (2.147) ამოცანის შეუღლებული (2.31), (2.32_{4-k}) ამოცანის არანულოვანი w_2 ამონახსნიც ნიშანამუდმივი ფუნქციაა და ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ რომ სრულდება უტოლობა

$$w_1(t)w_2(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in]a, b[\,. \tag{2.148}$$

მაშინ (2.137) ტოლობიდან მივიღებთ შეფასებას

$$\lim_{\nu \to +\infty} \int_a^b |p(s)| v_\nu(s) w_2(s) ds = \int_a^b |p(s)| w_1(s) w_2(s) ds > 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს ისეთი $\nu_2 \in \mathbb{N}$ მუდმივის არსებობა, რომ

$$\int_a^b |p(s)| u_\nu(s) w_2(s) ds > 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_2. \tag{2.149}$$

ახლა თუ (2.129) და (2.31) (თუ $w = w_2$) განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად w_2 და $-u_\nu$ ფუნქციებზე და მიღებული გამოსახულებების ჯამს ვაინტეგრებთ a-დან b-მდე, მივიღებთ

$$\int_a^b [u_\nu^{(4)}(s) w_2(s) - w_2^{(4)}(s) u_\nu(s)] ds = \int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))] w_2(s) ds -$$

$$\frac{1}{\ell_\nu} \int_a^b p(s) u_\nu(s) w_2(s) ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_2,$$

სადაც (2.130) და (2.32_{4-k}) სასაზღვრო პირობების შეუღლებულობის გათვალისწინებით ნაწილობით ინტეგრება მოგვცემს

$$\int_a^b [u_\nu^{(4)}(s) w_2(s) - w_2^{(4)}(s) u_\nu(s)] ds = 0.$$

მაშინ წინა ტოლობიდან (2.41) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$(-1)^k \int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))] w_2(s) ds = \frac{1}{\ell_\nu} \int_a^b |p(s)| u_\nu(s) w_2(s) ds \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_2,$$

საიდანაც (2.149) პირობის ძალით ცხადია, რომ

$$(-1)^k \int_a^b [h(s) + f(s, u_\nu(s))] w_2(s) ds > 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_2. \tag{2.150}$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ პირობები $N_{p,4} = \emptyset$, (2.130), (2.138), (2.147), (2.148), ჩვენი თეორემის (2.42), (2.43_k) პირობებთან ერთად გვიჩვენებენ, რომ დაცულია 2.5 ლემის ყველა მოთხოვნა, სადაც

$$f_1(t, x) = (-1)^{k+1} f(t, x), \qquad h_1(t) = (-1)^{k+1} h(t),$$

და მაშინ სამართლიანია (2.76), ანუ

$$(-1)^{k+1} \int_a^b [h(s) + f(s, u_n(s))] w_1(s) ds \geq 0 \qquad \text{თუ} \quad \nu > \nu_1$$

შეფასება. უკანასკნელი უტოლობა კი $\nu \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$ შემთხვევაში ეწინააღმდეგება (2.150) უტოლობას. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება იყო მცდარი, და ამდენად მოიძებნება $r_1 > 0$ ისეთი, რომ $||u_\nu||_C \leq r_1$ თუ $\nu \in \mathbb{N}$. ასეთ შემთხვევაში თუ შემოვიღებთ

$$\sigma_1(t) = |p(t)| r_1 + |h(t)| + f^*(t, r_1),$$

(2.129) განტოლებიდან მივიღებთ შეფასებას

$$|u_\nu^{(n)}(t)| \leq \sigma_1(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \ \ \nu \in \mathbb{N}.$$

აქედან მოყოლებული 2.1 თეორემის დამტკიცებაში მოყვანილი შესაბამისი მსჯელობის სიტყვასიტყვით გამეორებით დავრწმუნდებით ისეთი $u_0 \in \widetilde{C}^3(I; \mathbb{R})$ ფუნქციის არსებობაში, რომ შესრულდება (2.118) ტოლობა, საიდანაც გამომდინარეობს რომ u_0 იქნება (2.29), (2.30_k) ამოცანის ამონახსნი. $\square$

2.7 თეორემის დამტკიცება. თუ (2.47) პირობას განვიხილავთ როდესაც $x_2 = 0$, მივიღებთ

$$-g(t)|x| \leq (-1)^k f(t, x) \operatorname{sgn} x \leq -\ell(t) \eta(x, 0)|x| \leq 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.151}$$

აგრეთვე $\ell \not\equiv 0$ პირობის თანახმად, მოიძებნება ისეთი დადებითი ზომის $I_0 \subset I$ სიმრავლე, რომ

$$\ell(t) > 0 \qquad \text{თუ} \quad t \in I_0. \tag{2.152}$$

მაშინ (2.151), (2.152), და (2.48), პირობებიდან ცხადია რომ თუ შემოვიღებთ $I^- = I^+ = I_0$ შესრულდება 2.8 შედეგის (2.45), (2.46) პირობები, საიდანაც გამომდინარეობს რომ (2.29), (2.30_k) ამოცანა ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი $h \in L(I; \mathbb{R})$ ფუნქციისთვის.

საჩვენებელი დაგვრჩა ამონახსნის ერთადერთობა. დავუშვათ u_1 და u_2, არის (2.29), (2.30_k) ამოცანის განსხვავებული ამონახსნები, ანუ $u_1 \not\equiv u_2$, და შემოვიღოთ $u := u_1 - u_2$,

$$p_0(t) = \begin{cases} \frac{[f(t,u_1(t))-f(t,u_2(t))]\operatorname{sgn} u(t)}{|u(t)|} & \text{თუ} \quad u(t) \neq 0 \\ -p(t) & \text{თუ} \quad u(t) = 0 \end{cases}.$$

მაშინ ფუნქცია u იქნება

$$u^{(4)}(t) = (p(t) + p_0(t))u(t),$$

განტოლების ამონახსნი და დააკმაყოფილებს (2.30_k) სასაზღვრო პირობებს, სადაც (2.47), (2.152), და $\eta(x, y) > 0$, პირობების გათვალისწინებით I შუალედზე შესრულდება უტოლობა

$$p(t) + p_0(t) \leq p(t) - \ell(t)\eta(u_1(t), u_2(t)) \leq [p(t) - \ell(t)\eta(u_1(t), u_2(t))]_+ \preccurlyeq p(t) \qquad \text{თუ} \quad u \neq 0,$$

$$p(t) + p_0(t) = 0 < p(t) \qquad \text{თუ} \quad u = 0$$

როდესაც $k = 2$, და

$$p(t)+p_0(t) \geq p(t)+\ell(t)\eta(u_1(t), u_2(t)) \geq -[p(t)+\ell(t)\eta(u_1(t), u_2(t))]_- \succcurlyeq p(t) \qquad \text{თუ} \quad u \neq 0,$$

$$p(t) + p_0(t) = 0 > p(t) \qquad \text{თუ} \quad u = 0$$

როდესაც $k = 1$ ან $k = 3$. აქედან 1.12 შედეგით თუ $k = 2$ და 1.13 შედეგით თუ $k = 1$ ან $k = 3$, მივიღებთ რომ $u \equiv 0$, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას რომ $u_1 \not\equiv u_2$. მიღებული წინააღმდეგობა საბოლოოდ ამტკიცებს ჩვენს თეორემას. $\square$

დასკვნა

სადოქტორო ნაშრომში ჩვენ შევისწავლეთ არაწრფივი

$$u^{(n)}(t) = p(t)u(t) + f(t,\, u(t)) + h(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I := [a,\, b], \tag{3.1}$$

$$u^{(j_1-1)}(a) = 0 \ (j_1 = 1, \dots, k), \qquad u^{(j_2-1)}(b) = 0 \ (j_2 = 1, \dots, n-k), \tag{3.2$_k$}$$

ამოცანის ამოხსნადობის საკითხი რეზონანსულ შემთხვევაში იმ დაშვებით, რომ $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n-1,\ f \in K(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R}),\ p, h \in L(I; \mathbb{R})$.

აღნიშნული თემისთვის მიძღვნილ ნაშრომებს თუ გადავხედავთ (საკმარისია შესავალში განხილული ნაშრომებით შემოვიფარგლოთ, რადგან ეს ალბთ ყველაზე მნიშვნელოვანი ნაშრომებია აღნიშნულ თემატიკასთან დაკავშირებით), ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩვენ კვლევაში ფუნდამენტურად არის განზოგადებული აქამდე არსებული შედეგები. კერძოდ, განზოგადება მოხდა შემდეგი მიმართულებებით:

ა) თუ მოყვანილ ნაშრომებში მხოლოდ მეორე რიგის განტოლებისთვის დასმული დირიხლეს ამოცანა შეისწავლებოდა (იშვიათი გამონაკლისია როდესაც ნაშრომი მეოთხე რიგის განტოლებას ეთმობა) ჩვენ შევისწავლეთ ნებისმიერი რიგის განტოლებები ორწერტილოვანი სასაზღვრო პირობების მთელი (3.2_k) კლასისთვის;

ბ) თუ მოყვანილ ნაშრომებში ყოველთვის იგულისხმებოდა, რომ განტოლების წრფივი ნაწილის კოეფიციენტი მუდმივი ფუნქციაა ანუ $p = \lambda$, ჩვენ მივიღეთ შედეგები ნებისმიერი ნიშანმუდმივი და ლებეგის აზრით ინტეგრებადი p კოეფიციენტის შემთხვევაში. მეტიც, თუ უმეტესწილად იგულისხმებოდა რომ λ არის შესაბამისი წრფივი ერთგვაროვანი ამოცანის პირველი საკუთარი რიცხვი, ანუ ამ ამოცანის არანულოვანი ამონახსნი იგულისხმებოდა რომ ნიშანმუდმივი ფუნქციაა, ჩვენს შემთხვევაში შესაბამისი წრფივი ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი შეიძლება ნიშანცვლადი ფუნქციაც იყოს (როდესაც $n = 2m,\ k = m$);

გ) განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ჩვენ მიერ დადგენილი ის ფაქტი, რომ არაწრფივ ამოცანებს რეზონანსულ შემთხვევაში თურმე შეიძლება ერთადერთი ამონახსნიც გააჩნდეთ, როგორც ამას 2.7 თეორემა გვიჩვენებს;

დ) ჩვენ შედეგებში განტოლების არაწრფივ ნაწილზე დადებული შეზღუდვები უმეტესად უფრო ზოგადია ვიდრე ხსენებულ ნაშრომებში.

როგორც ეს შესავალში ვახსენეთ და როგორც ეს თვით ნაშრომიდანაც მოჩანს, მეოთხე რიგის ამოცანისთვის მიღებული შედეგები ეყრდნობა

$$u^{(4)}(t) = p(t)u(t) \qquad \text{თუ} \quad t \in I, \tag{3.3}$$

განტოლებისთვის ჩვენ მიერ დადგენილ შედარების ტიპის თეორემებსა და (3.3), (3.2_k) $(n = 2)$ ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობის თეორემებს.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მიუხედავად ჩვენი მცდელობებისა, ამ ეტაპზე არ მოხერხდა (3.1), (3.2_k) ამოცანის ამოხსნადობის თეორემების დამტკიცება იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს ამოცანა არ არის თვითშეუღლებული და ამავდროულად შესაბამის წრფივ ერთგვაროვან ამოცანას ნიშანცვლადი ამონახსნი გააჩნია. ზუსტად ეს შემთხვევა იქნება ალბათ ჩვენი მომავალი კვლევის საგანი.

საინტერესოა, რომ ჩვენი კვლევის პროცესში ნათლად გამოჩნდა ჩვენ მიერ მიღებული შედეგების განზოგადების სხვა პერსპექტიული მიმართულებებიც. პირველ რიგში

ესაა ისეთი განტოლებების განხილვა, რომლებიც მარჯვენა მხარეში უცნობი ფუნქციის წარმოებულებსაც შეიცავს, ანუ

$$u^{(n)}(t) = p(t)u(t) + f(t,\, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)) + h(t), \tag{3.4}$$

ან კიდევ უფრო ზოგადი

$$u^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} p_{j-1}(t)u^{(j-1)}(t) + f(t,\, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)) + h(t), \tag{3.5}$$

განტოლების განხილვა.

პრინციპული ხასიათის სირთულეები ჩნდება მაშინ როდესაც (3.4) განტოლებაში ბოლო $n-1$ არგუმენტი გავლენას ახდენს f ფუნქციის ნიშანზე ან/და f ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული ამ არგუმენტების მიმართ. ხოლო იმ შემთხვევას, როდესაც (3.4) განტოლებაში f ფუნქცია ბოლო $n-1$ არგუმენტის მიმართ ნიშანმუდმივი და შემოსაზღვრული ფუნქციაა, ჩვენ მიერ შემუშავებული მეთოდი ადვილად ერევა. თუმცა შედეგების ჩამოყალიბების გამჭვირვალეობის დაკარგვის თავიდან ასაცილებლად ასეთ, წმინდა ფორმალური ხასიათის განზოგადებაზე უარი ვთქვით სადოქტორო ნაშრომის ფარგელებში. კიდევ უფრო დიდ სირთულეს ვაწყდებით (3.5) განტოლების განხილვისას, რადგან აქ გვჭირდება ჩვენ მიერ მეოთხე რიგის ერთწევრა წფივი ერთგვაროვანი განტოლებისთვის დადგენილი არარხევადობის თეორემების მსგავსი თეორემების დადგენა

$$u^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} p_{j-1}(t)u^{(j-1)}(t) \tag{3.6}$$

განტოლებისთვის, რაც ცალკე კვლევის საგანია. ძალიან საინტერესოდ მიგვაჩნია (3.1), (3.2_k) ამოცანის გამოკვლევა იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომ ფუნქციებს განსაზღვრის არის ბოლოებში არაინტეგრებადი სიგულარობები გააჩნიათ.

აღნიშნული განზოგადებების პერსპექტივები კი იმიტომ ვახსენეთ აქ, რომ ჩვენი კვლევის პროცესში გარკვეული მცდელობები გვქონდა (3.4) და (3.5) განტოლებები რეგულარულ შემთხვევაში და (3.1) განტოლება სინგულარულ შემთხვევაში განგვეხილა (3.2_k) სასაზღვრო პირობებში რეზონანსულ შემთხვევაში და ჩვენმა მცდელობებმა დამაიმედებელი შედეგები მოგვცა და ამით ჩვენი მომავალი კვლევის პერსპექტივაც დასახა.

ლიტერატურა

1. Aguinaldo, L., Schmitt, K.: On the Boundary Value Problem $u'' + u = \alpha u^- + p(t), u(0) = 0 = u(\pi)$. Proc. Amer. Math. Soc. **68**, 64-68 (1978)

2. Ahmad, S., Lazer, A.: On nth-order sturmian theory. J. differential equations. **35**, 87-112 (1980)

3. Ahmad, S.: A resonance problem in which the nonlinearity may grow linearly. Proc. Amer. Math. Soc. **92**, 381-384 (1984)

4. Aliyev, Z., Kerimov, B.: On oscillation properties of the eigenfunctions of a fourth order differential operator. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Techn. Math. Sci. **25**, 63-76 (2005)

5. Aliyev, Z.: Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition. Cent. Eur. J. Math. **2**, 378–388 (2010)

6. Arias, M.: Existence results on the one-dimensional Dirichlet problem suggested by the piecewise linear case. Proc. Amer. Math. Soc. **97**, 121–127 (1986)

7. Bravyi, E.: On the solvability of a boundary value problem for fourth order linear functional differential equations, In: Abstracts of the International Workshop QUALITDE - 2017, Tbilisi, Georgia, December 24 - 26, 2017

8. Bravyi, E., Mukhigulashvili, S.: On solvability of two-point boundary value problems with separating boundary conditions for linear ordinary differential equations and totally positive kernels. In: Abstracts of the International Workshop QUALITDE – 2020 Tbilisi, Georgia, December 19 - 21, 2020

9. Cabada, A., Saavedra, L.: The eigenvalue characterization for the constant sign Green's functions of $(k, n-k)$ problems. Bound. Value Probl. **44**, 1–35 (2016)

10. Cabada, A., Enguica, R.: Positive solutions of fourth order problems with clamped beam boundary conditions. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **74**, 3112–3122 (2011)

11. Cesari, L., Kannan, R.: Existence of Solutions of a Nonlinear Differential Equation. Proc. Amer. Math. Soc. **88**, 605-613 (1983)

12. Coppel, W.: Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics. Spriger-Verlag, Berlin-New York (1971)

13. De Coster, C., Habets, P.: Upper and Lower Solutions in the theory of ODE boundary value problems. Sprringer, NewYork (1996)

14. De Coster, C., Habets, P.: The lower and upper solutions method for boundary value problems. In Handbook of Differential Equations. Elsevier, Amsterdam (2004)

15. Drabek, P.: On the resonance problem with nonlinearity which has arbitrary linear growth. J. Math. Anal. Appl. **127**, 435–442 (1987)

16. Drabek, P.: Landesman-Lazer type condition and nonlinearities with linear growth. Czechoslov. Math. J. **40**, 70–86 (1990)

17. Elias, U.: Oscillation theory of two-term differential equations. Kluwer Academic, Dordrecht (1997)

18. Elias, U.: Eigenvalue problems for the equations $Ly + \lambda p(x)y = 0$. J. Differential Equations. **29**, 28–57 (1978)

19. Elias, U.: Singular eigenvalue problems for the equation $y^{(n)} + \lambda p(x)y = 0$. Monatsh. Math. **142**, 205–225 (2004)

20. Ha, C., Kuo, C.: On the solvability of a two point boundary value problem at resonance. Topol. Methods Nonlinear Anal. **1**, 295–302 (1993)

21. Ha, C., Kuo, C.: On the solvability of a two point boundary value problem at resonance ii. Topol. Methods Nonlinear Anal. **11**, 159–168 (1998)

22. Iannacci, R., Nkashama, M.: Nonlinear boundary value problems at resonance. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 455–473 (1987)

23. Iannacci, R., Nkashama, M.: Nonlinear two point boundary value problems at resonance without landesman-lazer condition. Proc. Amer. Math. Soc. **106**, 943–952 (1989)

24. Johnson, G.: The k-th conjugate point function for an even order linear differential equation. Proc. Amer. Math. Soc. **42**, 563-568 (1974)

25. Kantorovich, R., Akilov, G.: Functional analysis. Pergamon Press, New York (1982)

26. Kannan, R., Nieto, J., Ray, M.: A class of nonlinear boundary value problems without landesman-lazer condition. J. Math. Anal. Appl. **105**, 1–11 (1985)

27. Kiguradze, I.: Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. J. Sov. Math. **43**, 2259–2339 (1988)

28. Kiguradze, I., Chanturia, T.: Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations. Kluwer Academic, Dordrecht (1993)

29. Kiguradze, I., Puža, B.: On some boundary value problems for fourth order functional differential equations. Mem. Differ. Equ. Math. Phys. **35**, 55–64 (2005)

30. Kondrat'ev, V.: Oscillatory properties of solutions of the equation $y^{(n)} + p(x)y = 0$. Tr. Mosk. Mat. Obs. **10**, 419–436 (1961)

31. Landesman, E., Lazer, A.: Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. J. Math. Mech. **19**, 609–623 (1970)

32. Leighton, W., Nehari, Z.: On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of fourth order. Trans Amer. Math. Soc. **89**, 325–388 (1958)

33. Levin, A.: Non-oscilation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$. Russian math. surv. **24**, 43–99 (1969)

34. Levin, A., Stepanov, G.: One-dimensional boundary value problems with operators that do not the lower number of sign changes. Siberian Math. J. **17**, 612–-625 (1976)

35. Ma, R., Wang, H., Elsanosi, M.: Spectrum of a linear fourth-order differential operator and its applications. Math. Nachr. **286**, 1805–1819 (2013)

36. Mawhin, J., Ward, J., Willem, M.: Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of a Nonlinear Two-Point Boundary Value Problem. Proc. Amer. Math. Soc. **93**, 667–674 (1985)

37. Manjikahvili, M., Mukhigulashvili, S.: On one two point BVP for the fourth order linear ordinary differential equation. Georgian Math. J. **24**, 265–275 (2017)

38. Manjikahvili, M., Mukhigulashvili, S.: Dirichlet BVP for the second order nonlinear ordinary differential equations at resonance. Math. Model. Anal. **24**, 585–597 (2019)

39. Manjikahvili, M., Mukhigulashvili, S.: The Dirichlet problem for the fourth order nonlinear ordinary differential equations at resonance. J. Contemp. Mathemat. Anal. **55**, 291-–302 (2020)

40. Manjikahvili, M., Mukhigulashvili, S.: Necessary And Sufficient Conditions Of Disconjugacy For The Fourth Order Linear Ordinary Differential Equations. Bull. math. Soc. Sci. Math. Romanie. **112**, 341-353 (2021)

41. Manjikahvili, M.: Disconjugacy and Green's functions sign for some two-point boundary value problems for fourth order ordinary differential equations. Georgian Math. J. **29**, 551–559 (2022)

42. Manjikahvili, M., Mukhigulashvili, S.: Two-point Boundary value problems for 4th order ordinary differential equations. Miskolc Math. Notes. 2022 (accepted)

43. Mukhigulashvili, S.: The Dirichlet bvp for the second order nonlinear ordinary differential equation at resonance. Italian J. Of Pure and Appl. Math. **2011**, 177–204 (2011)

44. Mukhigulashvili, S.: The mixed bvp for second order nonlinear ordinary differential equation at resonance. Math. Nachr. **290**, 393–400 (2016)

45. Mukhigulashvili, S.: The mixed BVP for the second order nonlinear ordinary differential equations at resonance. Miskolc Math. Notes. **18**, 975–992 (2017)

46. Naimark, M.: Linear Differential Operators. Ungar, New York (1968)

47. Xu, M., Ma, R.: On a fourth-order boundary value problem at resonance. J. Funct. Spaces. **2017**(2), 1–7 (2017)